

Compatibilitat en Àlgebra, en Lògica i en Informàtica

JOSEP MARIA FONT

Resum S'exposa una visió actual de l'estudi algebraic de la Lògica, especialment de les lògiques no clàssiques, prenent com a eix alguns conceptes purament algebraics com els de compatibilitat, congruència de Leibniz, i operador de Leibniz. Es mostra com aquests conceptes permeten definir una jerarquia de lògiques i classificar-les pel seu capteniment envers la seva algebraització, és a dir, per les relacions que mantenen amb els seus models algebraics, i per les propietats d'aquests models. Al final s'esmenten algunes de les línies de recerca més recents, en el context del camp emergent actualment anomenat Lògica Algebraica Abstracta.

Paraules clau: lògica algebraica abstracta, relació d'indiscernibilitat, operador de Leibniz, jerarquia de Leibniz, lògica algebraitzable, lògica protoalgebraica, equivalència deductiva, traduccions.

Classificació MSC2000: 03B22, 03G.

1 Introducció

Escriure sobre Lògica per a lectors matemàtics genèrics és sempre difícil i complicat. Fer-ho sobre Lògica Algebraica Abstracta, encara més. Per això, he volgut organitzar aquest article¹ des d'un punt de vista principalment algebraic, amb la pretensió que resulti més accessible, malgrat el seu caràcter força abstracte i especialitzat. No estic gens segur d'haver-ho aconseguit; m'agradaria creure que quan acabi de llegir aquest article el lector almenys haurà entès algunes de les característiques més prominents de la Lògica Algebraica Abstracta, malgrat que potser serà a partir d'una exposició un punt massa genèrica i superficial.

Podriem dir que la *Lògica Algebraica Abstracta* (LAA), desenvolupada els darrers vint anys, ha establert un nou paradigma, un nou punt de vista sobre les relacions entre l'estudi de les lògiques i el de les classes d'àlgebres que els

¹ Aquest article és una versió expandida de la conferència plenària donada per l'autor el 23 de setembre de 2006 en el Segon Congrés Txec-Català de Matemàtiques, organitzat per la Societat Catalana de Matemàtiques i la Societat Matemàtica Txeca.

són associades. L'estudi d'aquestes relacions ha estat sempre² l'objecte de la Lògica Algebraica. O bé es comença estudiant una classe d'estructures matemàtiques (normalment, estructures algebraiques),³ o bé es comença estudiant una lògica (normalment, una lògica proposicional no clàssica).⁴ Tant si la situació és la primera com la segona, hom intenta associar a l'objecte considerat inicialment un objecte de l'altre tipus, i hom intenta investigar tant les *propietats lògiques que tenen un significat algebraic*, com les *propietats algebraiques amb significat lògic*. Aquestes darreres són les que voldria destacar en aquest article.

Potser el tret més distintiu de la LAA, comparada amb la Lògica Algebraica més tradicional, és que no s'hi tracta cada cas particular separatament, sinó que hom intenta elaborar-ne teories generals. És a dir, estudiar les propietats i les relacions esmentades *des d'una perspectiva més global*, establint correspondències entre propietats algebraiques i propietats lògiques per a grans grups de lògiques, i si és possible en el marc d'una classificació sistemàtica de les lògiques. Un dels objectius més genuïns és trobar el que informalment s'anomenen *teoremes de pont (bridge theorems)*; hom anomena així els teoremes que estableixen que una lògica gaudeix d'una determinada propietat (típicament lògica) *si i només si* la classe d'àlgebres que li és associada gaudeix de determinada propietat (típicament algebraica). Pocs d'aquests teoremes són d'una generalitat extrema; la majoria valen sota certes condicions, o per a les lògiques que pertanyen a determinada classe, i per això és important establir una jerarquia o classificació. Pocs abans del final de la secció 10 n'esmentaré dos exemples.

L'article comença pel cantó algebraic; òbviament és inevitable presentar, d'entrada, una certa quantitat de terminologia i notació, per fer-lo raonablement autocontingut.⁵

2 Conceptes preliminars

Ja he parlat d'àlgebres i de classes d'àlgebres. Per una *àlgebra* entenc qualsevol estructura matemàtica $A = \langle A, \dots \rangle$ formada per un conjunt o *univers* A acompanyat d'un cert nombre (no necessàriament finit) d'operacions internes

² Des de la primera obra de Boole [12], publicada el 1847; vegeu també [13].

³ En els darrers anys la LAA ha estès el seu domini d'aplicació a l'estudi lògic d'estructures relacionals, especialment d'estructures ordenades; vegeu [33, 49, 54].

⁴ La base sobre la qual s'ha desenvolupat la LAA és l'estudi algebraic de la lògica proposicional clàssica o ordinària, la de les taules de veritat bivalorades, associada amb les àlgebres de Boole. Com a teoria general que és, la LAA es pot aplicar a lògiques de tota mena, de les quals la clàssica n'és un cas extrem que funciona extremament bé. Per aquest motiu l'interès de la LAA prové de la seva capacitat per a tractar altres lògiques. També s'aplica a la lògica de primer ordre, si bé el grau de complicació augmenta enormement; vegeu [8, apèndix C] i [30, secció 6].

⁵ Però ja d'entrada adverteixo que no serà possible definir totes les nocions que es mencionen al llarg de l'article, especialment cap al final: altrament, aquest article hauria esdevingut un «tutorial», i la seva extensió hauria depassat els raonables límits dels articles del nostre BUTLLETÍ. Per a un «survey» bastant actual i més detallat (però també més tècnic) de la LAA hom pot llegir [30].

en A . Aquestes operacions es classifiquen pel seu nombre d'arguments (finit), i aquests nombres formen el *tipus de similaritat*, o simplement *tipus*, de l'àlgebra.

Així, per exemple, els *grups* es poden presentar com a àlgebres $\langle G, \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$ de tipus $(2, 1, 0)$; això vol dir que \cdot és una operació binària (l'operació del grup), que $()^{-1}$ és una operació unària (l'invers) i que 1 , l'element neutre, és un element distingit de l'univers, una constant.⁶ Convé d'entrada fer dues observacions. Primera, el tipus no determina un grup; no tota estructura d'aquest tipus és un grup, òbviament caldrà que compleixi els axiomes de grup. Segona, no s'ha de confondre el tipus amb la *notació*; en l'exemple anterior hem usat la notació multiplicativa, però encara que hagués escollit la notació additiva $\langle G, +, -, 0 \rangle$, l'estructura també seria de tipus $(2, 1, 0)$.

Hi ha estructures que admeten més d'una *presentació*, és a dir, s'hi poden fer diferents eleccions de les operacions primitives (deixant de banda la notació). Un cas que ens interessa és el de les *àlgebres de Boole*. Es poden presentar com una certa classe d'anells commutatius amb unitat, que són àlgebres $\langle B, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ de tipus $(2, 1, 2, 0, 0)$, o bé com una certa classe de reticles⁷ afitats i complementats, que són àlgebres $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ de tipus $(2, 2, 1, 0, 0)$; \wedge i \vee són les operacions reticulars (ínfim i suprem, binaris), $'$ és el complement, i $0, 1$ són el mínim i el màxim del reticle, que corresponen als neutres de l'anell segons l'altra presentació.

Normalment denotaré una *classe d'àlgebres* amb la lletra \mathbf{K} . Quan parli en general d'una classe d'àlgebres qualsevol, la classe pot ser totalment arbitrària, però entenent que totes les àlgebres de \mathbf{K} tenen el mateix tipus.

El tipus de similaritat d'una àlgebra determina un *llenguatge algebraic* que podem construir per a referir-nos als elements de l'àlgebra. Els *termes* d'aquest llenguatge són les expressions (successions finites) que es poden construir amb els símbols de les operacions i els elements d'un cert conjunt *Var* de *variables*, que es denoten amb les lletres x, y, z , etc. Aquí tenim uns exemples de termes per als llenguatges dels tipus mencionats abans:

$$\begin{aligned} t_1 &: x \cdot (y^{-1}) \\ t_2 &: (x \cdot y) \cdot z \\ t_3 &: (x \cdot y^3) + (z \cdot y) + x + 1 \\ t_4 &: (x \wedge (y \vee x')) \wedge (x' \vee z), \end{aligned} \tag{1}$$

on t_1 és un terme del llenguatge dels grups, t_2 ho pot ser tant dels grups com dels anells, mentre que t_3 és un terme del llenguatge dels anells i t_4 ho és del llenguatge dels reticles complementats, és a dir, de les àlgebres de Boole en la segona presentació. Evidentment, no hi ha res específic dels grups, anells o les

⁶ És natural assignar el tipus 0 a les constants, ja que en una operació o funció constant l'argument és irrelevant, per tant, es pot pensar com una funció sense arguments (nombre d'arguments = 0).

⁷ Un *reticle* és un conjunt ordenat on per a cada dos elements a, b existeix el seu suprem, que es denota amb $a \vee b$, i el seu ínfim, $a \wedge b$. El complement és una operació unària $'$ tal que $a \vee a' = 1$ i $a \wedge a' = 0$.

àlgebres de Boole en aquestes termes: són termes per a qualsevol estructura algebraica amb el mateix tipus de similaritat. Noteu no gensmenys que a t_3 hi he usat un parell de convencions de caràcter molt diferent: la primera és escriure γ^3 per $((\gamma \cdot \gamma) \cdot \gamma)$; això és simplement una abreviació notacional, que es pot fer sempre, només cal definir-la. La segona és que he pressuposat l'associativitat de l'operació $+$; en tot rigor, caldria escriure $((x \cdot \gamma^3) + (z \cdot \gamma)) + x + 1$, i podrem escriure'l com a (1) només quan ens proposem usar aquest llenguatge per a estudiar estructures on $+$ sigui efectivament associativa, ja que altrament l'expressió t_3 seria ambigua.

Una idea útil pot ser entendre els termes com una generalització dels *polinomis* de l'àlgebra ordinària. Les variables fan el paper de les *indeterminades*. Una diferència important és que a l'àlgebra ordinària acostumem a treballar amb polinomis sobre un conjunt concret (normalment un anell o un cos), i, per tant, admetem *coeficients*, que són símbols per a elements concrets d'aquest conjunt concret. Una altra diferència és que en els polinomis ens limitem a expressions d'una forma molt concreta, per exemple $a \cdot (x^3) + b \cdot (x^2 \cdot \gamma) + c \cdot x + e$, on a, b, c, d, e són coeficients.

Els termes viuen en un context més general, on només es permeten variables i símbols per a les operacions del llenguatge algebraic,⁸ però en canvi deixem que aquests objectes es combinin de qualsevol manera. Així, per exemple, a partir de dos termes t_1, t_2 qualssevol i una operació binària $*$ sempre podem formar un altre terme $t_1 * t_2$. En general, veiem que el conjunt de tots els termes del llenguatge té una estructura algebraica del mateix tipus, és l'*àlgebra dels termes* $Te = \langle Te, \dots \rangle$; és l'àlgebra lliure del tipus en qüestió⁹ generada pel conjunt de variables *Var*; aquest conjunt és infinit, i per a gran part de la teoria és suficient suposar que és numerable, però en alguns resultats es fan servir conjunts de variables d'altres cardinalitats (infinites).

En un context lògic, els termes s'anomenen *fòrmules*. En aquest article parlaré sempre de termes, però adoptaré el costum lògic de denotar-los amb lletres gregues minúscules com ara α, β , etc. És costum escriure $\alpha(x, \gamma)$ per a destacar que en el terme α només hi poden aparèixer (com a màxim) les variables x, γ . Els conjunts de termes els denotaré amb lletres gregues majúscules com ara Γ, Δ ; el significat d'expressions com $\Delta(x, \gamma)$ és l'obvi.

Un cop tenim els termes, podem escriure *equacions*. Informalment, una equació és una igualtat entre dos termes α i β ; però no una igualtat en el sentit que siguin precisament el mateix terme (cosa que es denotaria amb $\alpha = \beta$), sinó en el sentit que és una possible igualtat del valor dels dos termes, que es pot complir o no segons els valors que prenguin les variables que apareguin en aquests termes. Formalment, doncs, una equació serà un parell ordenat¹⁰

⁸ Evidentment, si el tipus conté constants, entre aquestes «operacions» hi haurà símbols per a les constants.

⁹ És a dir, l'àlgebra lliure de la classe de totes les àlgebres del mateix tipus; se l'anomena l'àlgebra *absolutament lliure* del tipus especificat.

¹⁰ En Lògica i en Teoria de Conjunts hi ha la tendència a escriure els parells ordenats en la forma $\langle a, b \rangle$ en comptes de (a, b) . El motiu és que els parèntesis usals (arrodonits) s'usen

de termes $\langle \alpha, \beta \rangle$, de manera que el conjunt de les equacions és $Te \times Te$. Per a fer-ho més intuïtiu, escriurem l'equació $\langle \alpha, \beta \rangle$ en la forma $\alpha \approx \beta$; així no caldrà emprar el símbol $=$, que denota la igualtat entre expressions del llenguatge.

Els termes i les equacions són objectes d'un llenguatge formal, i només adquireixen un *significat* quan s'interpreten en una àlgebra concreta A . El significat d'un terme és el seu valor sota una interpretació. Una *interpretació* és una funció $\bar{a} : Var \rightarrow A$ que dóna valors en A a les variables. Denotaré per $\alpha^A(\bar{a}) \in A$ el valor del terme α en la interpretació \bar{a} , i per a computar-lo només cal donar a les variables els valors indicats per \bar{a} , aplicar recursivament les operacions de A indicades en α i anar obtenint els valors parcials dels subtermes, fins a obtenir el valor final del terme. Informalment, diríem que és «substituir les variables pel seu valor i operar». Tècnicament, això és estendre la funció \bar{a} a un homomorfisme entre les àlgebres Te i A gràcies al caràcter lliure de l'àlgebra Te . El conjunt de totes les interpretacions és, doncs, el conjunt de tots els homomorfismes $\text{Hom}(Te, A)$. Si el terme és de la forma $\alpha(x, y)$ aleshores el seu valor només depèn dels valors de x i y ; si aquests valors són $a, b \in A$ denotaré el valor final amb $\alpha^A(a, b)$, i semblantment per a un $\Delta(x, y) \subseteq Te$ posaré $\Delta^A(a, b) = \{\alpha^A(a, b) : \alpha(x, y) \in \Delta(x, y)\}$.

El significat d'una equació sota una interpretació és el fet de si es satisfà (compleix) o no, és a dir, si és veritat o no. Formalment, *una interpretació \bar{a} en una àlgebra A satisfà una equació $\alpha \approx \beta$* quan dóna el mateix valor als dos membres de l'equació; amb les notacions anteriors, quan $\alpha^A(\bar{a}) = \beta^A(\bar{a})$. Això és una generalització de la idea de si un element concret d'una àlgebra concreta és o no arrel d'un polinomi, és a dir, si fa que el polinomi adquireixi el valor 0 quan es posa aquell element en el lloc de la indeterminada.

A partir d'aquí, i prenent totes les interpretacions en A , o totes les A de \mathbf{K} , es pot definir de la manera natural quan una equació és *vàlida* en una àlgebra A (totes les interpretacions la satisfan) o en una classe \mathbf{K} d'àlgebres (és vàlida en totes les àlgebres de la classe).

Ens interessa més una altra noció: *La conseqüència equacional relativa a una classe d'àlgebres \mathbf{K}* . Es tracta d'una relació entre conjunts d'equacions i equacions. Una equació $\alpha \approx \beta$ és *una conseqüència de $\Theta \subseteq Te \times Te$ relativa a \mathbf{K}* quan, cada vegada que totes les equacions de Θ són satisfetes per una interpretació en una àlgebra de \mathbf{K} , també $\alpha \approx \beta$ és satisfeta per la mateixa interpretació. En símbols:

$$\Theta \models_{\mathbf{K}} \alpha \approx \beta \iff \text{Si } \delta^A(\bar{a}) = \varepsilon^A(\bar{a}) \quad \forall \delta \approx \varepsilon \in \Theta, \text{ aleshores } \alpha^A(\bar{a}) = \beta^A(\bar{a}), \\ \text{per a tota } \bar{a} \in \text{Hom}(Te, A) \text{ i tota } A \in \mathbf{K}.$$

Un exemple simple d'una d'aquestes conseqüències podria ser la llei cancel·lativa: normalment la descriuríem com « $a \cdot b = a \cdot c \implies b = c$ per tots a, b, c »;

per a massa coses diferents: delimitar l'abast de les operacions en expressions simbòliques, com els termes de (1); indicar les variables d'un terme, com en $\alpha(x, y)$; indicar la imatge d'un element per una funció, $f(a)$; els intervals oberts de la recta real $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, i, en general, com a «separadors» en expressions simbòliques potencialment ambigües.

si l'escrivim així:

$$x \cdot y \approx x \cdot z \models_{\mathbf{K}} y \approx z$$

destaquem que es pot complir o no segons quina sigui la classe \mathbf{K} , per exemple si \mathbf{K} és la classe dels grups es compleix, mentre que si \mathbf{K} és la classe dels anells no es compleix.

És clar, doncs, que la relació $\models_{\mathbf{K}}$ està completament determinada per les propietats de les àlgebres de la classe \mathbf{K} . L'he anomenada *conseqüència*, i es podria dir que és *la lògica intrínseca de la classe d'àlgebres \mathbf{K}* . Però observeu que no té res a veure, de moment, amb el que s'entén normalment per «lògica»; és una relació purament algebraica.

3 Congruències, ideals i filtres

Una de les idees clau que m'agradaria destacar en aquest article és que

una de les principals forces que han dirigit l'evolució de la recerca en LAA ha estat l'estudi de la significació lògica de les congruències de les àlgebres de la Lògica.

Les congruències són objectes típicament algebraics, es defineixen i es manipulen amb mitjans purament algebraics, hom pot usar trucs algebraics per a computar-les, etc. El fet que puguin tenir una significació lògica, i que a més aquesta significació sigui la clau d'una certa classificació de les lògiques que explica tant el seu capteniment algebraic com el metalògic, constitueix un dels descobriments importants del darrer quart del segle passat en Lògica Algebraica.

Deixeu-me aclarir que entenc per *congruència d'una àlgebra A* arbitrària qualsevol relació d'equivalència θ en A que sigui compatible amb les operacions de A , és a dir, que permeti definir de manera única les operacions en el quocient A/θ i així esdevingui una àlgebra A/θ del mateix tipus de similaritat, i la projecció canònica $\pi : A \rightarrow A/\theta$ sigui un epimorfisme (homomorfisme exhaustiu). Un parell de notacions: si $a \in A$, $\pi(a) = a/\theta$ denota la classe d'equivalència de a (que també s'acostuma a denotar amb $[a]_{\theta}$ o \bar{a}); i $\text{Co}A$ denota el conjunt de totes les congruències de A .

El fet que l'àlgebra A pertanyi a una classe \mathbf{K} no garanteix que el quocient A/θ hi pertanyi, malgrat que sigui del mateix tipus. Tots sabem que si A és un anell, qualsevol quocient A/θ també serà un anell, però que si A és un domini d'integritat, A/θ no sempre ho serà (només si θ és la congruència associada a un ideal primer). Més en general, ens pot interessar considerar àlgebres que no siguin necessàriament a \mathbf{K} , i estudiar les congruències θ tals que A/θ és a \mathbf{K} ; pensant ara en cossos, sabem que no totes les congruències θ d'un anell converteixen A/θ en un cos (només les associades als ideals maximals). Com veurem, quan es consideren models algebraics de lògiques (secció 7), en principi s'admeten àlgebres totalment arbitràries, però les congruències que interessin són les que donen un quocient dins una classe més restringida d'àlgebres, les

que «corresponen» de manera més estreta a la lògica en qüestió. És, doncs, important considerar aquestes congruències: per a una classe \mathbf{K} qualsevol i una àlgebra A qualsevol, no necessàriament de \mathbf{K} , les *congruències relatives a \mathbf{K}* són les que donen un quocient dins de \mathbf{K} :

$$\text{Co}_{\mathbf{K}}A = \{\theta \in \text{Co}A : A/\theta \in \mathbf{K}\} \quad (2)$$

Observeu que si \mathbf{K} és una classe d'àlgebres definida per equacions, com és el cas dels anells, i $A \in \mathbf{K}$, aleshores tota congruència és relativa ($\text{Co}_{\mathbf{K}}A = \text{Co}A$), ja que les equacions es conserven en la construcció dels quocients. Moltes de les classes d'àlgebres associades a les lògiques més conegudes, començant per les àlgebres de Boole, es poden definir usant exclusivament equacions. Això pot explicar que durant bastants anys hom estudiés simplement les congruències, i que només quan s'ha construït aquesta teoria més general l'atenció s'hagi dirigit a les congruències relatives. Com veurem, són aquestes les que poden adquirir un significat lògic.

Alguns dels lectors potser s'estan preguntant: per què ens parlen de congruències, i no ens parlen d'ideals? Bé, doncs, parlem-ne. Es tracta d'una observació empírica del segle passat: en cada àlgebra de les associades amb la Lògica, però també en d'altres classes d'àlgebres, hi ha una relació molt estreta entre les congruències de l'àlgebra i un cert tipus de subconjunts especials, que podem anomenar *ideals* o *filtres* de manera genèrica. De fet, normalment la relació és una bijecció que respecta l'ordre,¹¹ és a dir, un isomorfisme d'ordre, i en conseqüència un isomorfisme reticular.

En alguns casos això és un fet familiar. Tothom sap que en els grups les congruències es poden «identificar» amb els subgrups normals, i en els anells, amb els ideals. A més, la identificació es fa a través de bijeccions que es poden definir explícitament; per exemple si A és un anell les bijeccions són les següents:

$$\begin{array}{lcl} \{\text{ideals d}'A\} & \cong & \text{Co}A \\ I & \rightarrow & a \equiv b (I) \iff a - b \in I \\ 0/\theta & \leftarrow & \theta. \end{array} \quad (3)$$

Aquest esquema també val per a les àlgebres de Boole, considerades com a anells, però en aquest cas hi ha esquemes alternatius, ja que tenim també l'estructura reticular, i l'anterior bijecció es pot definir usant eines purament reticulars:

$$\begin{array}{lcl} \{\text{ideals d}'A\} & \cong & \text{Co}A \\ I & \rightarrow & a \equiv b (I) \iff \exists c \in I \text{ amb } a \vee c = b \vee c \\ 0/\theta & \leftarrow & \theta. \end{array} \quad (4)$$

¹¹ Entre congruències es considera la relació \leq definida així: $\theta_1 \leq \theta_2 \iff [a \equiv b (\theta_1) \text{ implica } a \equiv b (\theta_2)]$. Això és una relació d'ordre en $\text{Co}A$, que esdevé un reticle complet. El lectors més «conjuntistes» hauran advertit que si identifiquem una relació binària amb el conjunt dels parells d'elements que relaciona, aleshores aquest ordre \leq no és res més que la inclusió conjuntista.

La cosa es pot simplificar si ho dualitzem tot, i en comptes dels ideals considerem els filtres.¹² Aleshores queda:

$$\begin{array}{rcl} \{\text{filtres d}'A\} & \cong & \text{Co}A \\ F & \rightarrow & a \equiv b (F) \iff a \leftrightarrow b \in F \\ 1/\theta & \longleftarrow & \theta. \end{array} \quad (5)$$

on $x \leftrightarrow y := (x' \vee y') \wedge (x \vee y')$ és un terme definit a partir de les operacions reticulars i el complement, un terme que, com veurem a la secció 10, té una interpretació lògica, tal com suggereix el seu símbol.

Situacions similars van ésser observades per molts investigadors al llarg del segle passat. Per exemple, les podem trobar, si bé una mica emmascarades, en la famosa monografia [56], i explícitament a [16]. La paraula *filtre* ha adquirit vida pròpia en Lògica Algebraica, ja que (5) expressa el contingut lògic de l'isomorfisme molt millor que (4).

Una característica purament algebraica que podem observar en els anteriors esquemes és que, com que es tracta de bijeccions, ens indiquen que en aquestes àlgebres cada congruència queda totalment determinada per una de les seves classes d'equivalència, concretament per la classe d'un element destacat de l'àlgebra (0 o 1). Aquesta propietat, que en Àlgebra Universal s'anomena *punt-regularitat*, i la propietat més general que en una classe d'àlgebres les congruències siguin determinades per ideals/filtres, han estat molt estudiades des del punt de vista purament algebraic, si bé amb influències de la Lògica Algebraica; vegeu per exemple [2, 10, 40]. Hom pot concloure d'aquestes investigacions que gairebé sempre que trobem una classe d'àlgebres amb aquesta propietat, trobarem una lògica associada a aquestes àlgebres de manera que el seu capteniment lògic ve determinat, en cert sentit, per aquest isomorfisme.

Per a veure com funciona tot això he de parlar de la propietat esmentada en el títol de l'article: la compatibilitat.

4 Compatibilitat

Aquesta és una propietat que relaciona una congruència amb un subconjunt d'una àlgebra: Sigui A una àlgebra, sigui $\theta \in \text{Co}A$, i sigui $F \subseteq A$. Diem que θ és *compatible amb* F quan, per a qualssevol $a, b \in A$, es compleix que

$$\text{si } a \equiv b (\theta), \text{ aleshores } a \in F \iff b \in F.$$

És a dir, θ és compatible amb F quan θ no «trenca» F , no identifica mai un element de dins de F amb un element de fora de F ; dit d'una altra manera, quan F és saturat per θ , és a dir, F és una unió de classes d'equivalència de θ , en símbols $F = \bigcup_{a \in F} a/\theta$. Això vol dir que, en fer el quocient per θ , no solament

¹² Un subconjunt $F \neq \emptyset$ és un *filtre* quan si $a, b \in F$ aleshores $a \wedge b \in F$, i si $a \in F$ aleshores $b \in F$ per tot $b \geq a$. Si es vol ser precís, hom els anomena *filtres reticulars* o *implicatius* per a distingir-los dels *filtres d'ordre*, que només compleixen la segona propietat.

poden passar al quocient les operacions de A , sinó també el subconjunt F : si definim $F/\theta := \{a/\theta : a \in F\}$, la compatibilitat ens assegura que per a tot $a \in A$, $a \in F \iff a/\theta \in F/\theta$.

Si es vol preservar el significat lògic de certs subconjunts quan es construeixen quocients,¹³ cal treballar amb congruències compatibles. Si es volen identificar el màxim d'elements de l'àlgebra sense «trençar» els límits del subconjunt, cal treballar amb la més gran congruència compatible. És possible? Sí. No és difícil demostrar [63] que per a cada $F \subseteq A$, la congruència més gran de A compatible amb F sempre existeix. Aquesta congruència es denota amb $\Omega_A F$ i s'anomena *la congruència de Leibniz* del parell $\langle A, F \rangle$, o simplement de F , si l'àlgebra està clara pel context:

$$\Omega_A F = \text{màx} \{ \theta \in \text{CoA} : \theta \text{ és compatible amb } F \}. \quad (6)$$

La demostració de [63] no ens diu res de com és aquesta congruència, és una prova existencial pura; una descripció una mica més intuïtiva ens la dóna el resultat següent de Czelakowski [15], basat en l'anàlisi més particular de Loś [44]:

1 TEOREMA Si A és una àlgebra, $F \subseteq A$, i $a, b \in A$, aleshores $a \equiv b \ (\Omega_A F)$ si i només si per a tota funció polinòmica P (unària) sobre A es compleix que $P(a) \in F \iff P(b) \in F$.

Una *funció polinòmica sobre A* és el que penseu: una funció definida per un polinomi amb «coeficients» en A . Ja he dit que els nostres «polinomis» són els termes del llenguatge algebraic; per tant, una funció polinòmica sobre A és una funció $P : A \rightarrow A$ tal que existeix un terme $\alpha(x, y, z, \dots)$ i uns elements $b, c, \dots \in A$ (els «coeficients») tals que $P(\cdot) = \alpha^A(\cdot, b, c, \dots)$.

Podem interpretar aquesta caracterització en el sentit següent: si llegim « $a \in F$ » com « F veu a », aleshores dos elements són equivalents mòdul la congruència de Leibniz de F quan F no els pot «distingir» ni amb l'ajut del llenguatge algebraic de A ; per això la congruència de Leibniz també s'anomena *relació d'indiscernibilitat*. Una altra manera d'entendre-la és dir que un dels elements pot substituir l'altre en qualsevol expressió del llenguatge, sense que F noti la diferència; és a dir, el que s'anomena *relació de sinonímia* en lingüística. En certa manera, és com una relació d'identitat relativa. L'elecció del nom de Leibniz per a batejar aquesta congruència està basada en consideracions en aquestes línies,¹⁴ i es deu a Blok i Pigozzi [8].

13 Per què és important la construcció de quocients en Lògica Algebraica, és una qüestió que ens duria molt lluny, però que potser s'aclarirà una mica cap al final de la secció 7. Per ara diré només que, en el fons, construir quocients vol dir identificar elements que són «idèntics o indistingibles sota cert punt de vista», i que les anomenades «àlgebres de la Lògica» s'obtenen quan es factoritza l'àlgebra de termes eliminant al màxim les diferències irrellevants des del punt de vista de la lògica de què es tracti. Vegeu, per exemple, el teorema 8 i [30, secció 2].

14 En el seu *Discurs sobre Metafísica*, el matemàtic, filòsof, jurista i diplomàtic G. W. Leibniz (1646–1716) va defensar l'anomenat *principi de la identitat dels indiscernibles*: la idea que si dos objectes són diferents, s'han de poder distingir per alguna « propietat » que un d'aquests compleixi i l'altre no. Restringint la idea al nostre cas, a [8, secció 1.4] es prova una altra versió

Com he dit, això es pot fer per a qualsevol subconjunt d'una àlgebra A . Per tant, tenim una funció

$$\begin{aligned}\Omega_A : \mathcal{P}(A) &\longrightarrow \text{Co}A \\ F &\longmapsto \Omega_A F\end{aligned}\tag{7}$$

que queda completament determinada per l'estructura algebraica de A . No depèn de res més. Si A és petita, o la seva estructura és senzilla, pot ser relativament senzill computar aquesta funció. Això serà força útil en la cerca de contraexemples, com veurem a la secció 9. D'altra banda, a la teoria general, l'estudi d'aquesta funció¹⁵ ha resultat central per a la construcció de la visió de la Lògica Algebraica que vull exposar en aquest article.

Però abans d'entrar-hi, tal com apunta el títol de l'article, parlaré de la Informàtica.

5 Una curta excursió a la Informàtica

L'aspecte més clàssic, i probablement més conegut, de les aplicacions de la Lògica en la Informàtica Teòrica és l'estudi de qüestions teòriques associades a conceptes com *algorisme*, *computació*, etc. És la teoria de la decidibilitat, la complexitat algorísmica, etc. Però aquí em vull referir a un altre aspecte, que té a veure amb la concepció de la Informàtica com l'estudi dels mètodes matemàtics per al tractament automatitzat de la informació. Mentre que la Lògica Matemàtica tradicional estudia els processos deductius que permeten obtenir conclusions vàlides a partir de premisses donades com a certes, les aplicacions de la Lògica a la Informàtica a què em refereixo tenen a veure amb els processos d'extracció d'informació a partir d'altres informacions donades.

En aquest context, la idea de *indiscernibilitat* apareix de manera natural. Per a convertir grans masses de dades en informació útil, una de les tasques és eliminar diferències irrellevants, i això porta a considerar algun tipus de relació d'indiscernibilitat: genèricament, dos objectes són indiscernibles si no els podem distingir amb la informació que en tenim. Per exemple, aquesta noció és un dels conceptes més bàsics en la teoria dels conjunts aproximats («rough sets») [50], que ha esdevingut una eina molt popular en aplicacions a la mineria de dades, suport a la presa de decisions, sistemes experts, aprenentatge automàtic, etc., especialment en el tractament d'informació imprecisa o incompleta. Aquí, hom associa una relació d'indiscernibilitat a cada atribut (propietat) o conjunt d'atributs, i hom estudia les dependències entre conjunts d'atributs, i n'extreu regles d'inferència, a partir de les seves relacions d'indiscernibilitat.

Una altra noció d'indiscernibilitat la trobem a la teoria dels sistemes d'informació. Una manera corrent de modelar-los són les àlgebres heterogènies,

del teorema 1, que diu que $a \equiv b$ ($\Omega_A F$) si i només si a i b compleixen les mateixes propietats expressables en el llenguatge de primer ordre de l'estructura $\langle A, F \rangle$.

¹⁵ En aquest article ens centrem en la funció que assigna a cada subconjunt la màxima congruència compatible, però la relació de compatibilitat en si mateixa i la connexió de Galois que en resulta també tenen el seu interès i les seves aplicacions, com es mostra en [31].

que tenen diferents categories o tipus¹⁶ d'elements. En particular, es considera el que s'anomena una *àlgebra oculta* (*hidden algebra*, [39]), una estructura algebraica amb dos tipus d'elements (*two-sorted*), els *ocults* i els *visibles*. Una possibilitat és considerar que els elements de tipus ocult són els estats del sistema, i els de tipus visible són les dades, la informació externa. Mentre que les dades serien accessibles directament de manera totalment transparent per a l'usuari, als estats només es podria accedir a través dels resultats dels programes. La noció d'indiscernibilitat rellevant aquí s'anomena *equivalència conductual* (*behavioural equivalence*); en aquesta teoria, dos elements són conductualment equivalents quan tots els programes retornen el mateix valor en executar-se amb aquests elements com a argument.

Una variant de l'anterior la trobem en una línia de recerca recent en l'estudi de les especificacions algebraiques de la programació orientada a objectes, que ha rebut explícitament la influència de la LAA. En el paradigma orientat a objectes, les interfícies d'alguns sistemes encapsulen els estats locals dels objectes i les operacions que els modifiquen, assignant-los al tipus ocult, per tal de facilitar la modularitat i la revisió de les aplicacions, mentre que els estats del sistema serien de tipus visible. La relació amb la LAA apareix quan això es formalitza amb el que s'anomena *estructures de dades ocultes*, que són parells $\langle A, F_A \rangle$, on A és una àlgebra oculta en el sentit anterior, i $F_A \subseteq \{\text{elements visibles}\}$ representa el conjunt d'estats acceptats pel sistema. En aquest cas, dos elements són conductualment equivalents quan els dos valors resultants de qualsevol programa, executat amb un o un altre element com a entrada, mostren la mateixa conducta pel que fa a l'acceptació pel sistema, és a dir, o bé són ambdós acceptats o bé cap dels dos no ho és. Si acceptem que en aquesta modelació algebraica el resultat d'un programa es representa pel valor d'una funció polinòmica, i tenim en compte el teorema 1, no se'ns farà gaire estrany que hom hagi provat [47]:

2 TEOREMA *La relació d'equivalència conductual d'una estructura de dades ocultes $\langle A, F_A \rangle$ coincideix amb la congruència de Leibniz $\Omega_A F_A$.*

A més, a partir d'aquesta relació d'equivalència conductual es pot definir una altra relació d'equivalència, anomenada *equivalència conductual global*, no ja entre dades, sinó entre estructures de dades ocultes, que generalitza la noció habitual d'equivalència entre autòmats. No la definiré aquí, només deixaré constància del resultat següent [46]:

3 TEOREMA *Dues estructures de dades ocultes $\langle A, F_A \rangle$ i $\langle B, F_B \rangle$ són globalment conductualment equivalents si i només si les àlgebres quocient $A/\Omega_A F_A$ i $B/\Omega_B F_B$ són isomorfes.*

Així, doncs, una noció motivada per les aplicacions d'aquestes estructures de dades ocultes es pot caracteritzar per una propietat netament algebraica (un isomorfisme) on intervé la congruència de Leibniz. Els articles citats incorporen

¹⁶ En anglès, *sorts*; per això es diu que les àlgebres són *many-sorted*.

d'altres eines de la LAA per a aprofundir en l'anàlisi algebraica d'aquests conceptes.

Això són només un parell de pinzellades, que persones més especialitzades podrien explicar amb més solvència; m'ha semblat, malgrat tot, que era interessant d'incloure-les aquí per a donar notícia que aquestes aplicacions de la LAA a d'altres camps existeixen.

6 Lògiques

Tornant a l'estudi de la congruència de Leibniz, arribem ara a un punt on necessàriament intervé *la Lògica*.¹⁷ L'estudi de la funció Ω_A definida en (7) se centra en la seva restricció a determinats subconjunts de l'àlgebra que tenen un significat lògic; concretament, als *models* d'una lògica sentencial. Per tant, millor que digui d'una vegada què és *una lògica* en aquest context.

4 DEFINICIÓ Una *lògica (sentencial)* és un operador de clausura invariant sota substitucions en l'àlgebra de termes. És a dir, una funció $C : \mathcal{P}(Te) \rightarrow \mathcal{P}(Te)$ que compleix els coneguts axiomes de Tarski [59]:

1. és *expansiva*: $\Gamma \subseteq C(\Gamma)$, per a tot $\Gamma \subseteq Te$,
2. és *monòtona*: $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow C(\Gamma) \subseteq C(\Delta)$, per a tots $\Gamma, \Delta \subseteq Te$,
3. és *idempotent*: $C \circ C = C$,

i és *invariant per substitucions* en el sentit que compleix la condició afegida posteriorment per Łoś i Suszko [45]:

4. per a qualsevol $\sigma : Var \rightarrow Te$, si $\alpha \in C(\Gamma)$ aleshores $\sigma\alpha \in C(\sigma\Gamma)$.

Si $\Gamma \subseteq Te$, el conjunt $C(\Gamma)$ és *la teoria generada per Γ* . L'expressió « $\alpha \in C(\Gamma)$ » es llegeix « α és una *conseqüència* de Γ »; la funció C també s'anomena *l'operador de conseqüència (lògica)*, i els termes $\alpha \in C(\emptyset)$, els seus *teoremes*.

En determinades situacions serà més gràfic utilitzar la notació més tradicional de la Lògica, i escriure $\Gamma \vdash_C \alpha$ en comptes de $\alpha \in C(\Gamma)$; hom diu que \vdash_C és la *relació de conseqüència*¹⁸ associada a la lògica C .

Una *substitució*, matemàticament, és un *endomorfisme* de l'àlgebra de termes Te , que per la llibertat d'aquesta és determinat per la seva restricció al conjunt dels generadors, que és una funció arbitrària $\sigma : Var \rightarrow Te$. Això justifica la forma adoptada per a la condició 4. El conjunt de totes les substitucions el denotaré, per tant, amb $\text{End}(Te)$.

¹⁷ A diferència d'altres disciplines, el nom de la nostra matèria coincideix amb el seu principal objecte d'estudi; podríem dir que *la Lògica és l'estudi de les lògiques*. De manera que posem en minúscula el nom de l'objecte matemàtic, que té la seva definició, la seva teoria general, els seus exemples concrets, etc., i en majúscula el nom de la matèria, i en general d'altres disciplines; també per això diem *la Lògica*, per una banda, i *una lògica*, per l'altra!

¹⁸ La relació \models_K també és una «relació de conseqüència», ja que compleix propietats similars a les d'aquesta definició, però actua sobre el conjunt de les equacions en comptes del conjunt dels termes.

Les propietats 1, 2 i 3 defineixen la noció de *operador de clausura* que trobem en moltes àrees de les matemàtiques (la clausura algebraica d'un cos, l'adherència en topologia, el subgrup o subespai generat, etc.). Amb això ja tenim les eines matemàtiques bàsiques per a treballar amb lògiques. El que és específic aquí és la propietat 4, la *invariància per substitucions*, que ens diu que la conseqüència respecta l'estructura formal de l'àlgebra de termes. Què vol dir això? Recordem que aquesta àlgebra depèn del llenguatge algebraic. En una lògica, les operacions algebraiques de l'àlgebra de termes representen les anomenades *connectives lògiques*, amb les quals es construeixen expressions (fórmules o termes, com vulguem) complexes a partir d'expressions més simples; per exemple, habitualment les operacions reticulars \wedge i \vee representen la *conjunció* i la *disjunció* lògiques. Aleshores, la condició 4 ens assegura que les variables fan, en la relació de conseqüència, exactament el paper que el seu nom indica, és a dir, el de representar una expressió variable arbitrària: si per a una lògica val $x \wedge y \vdash_C y \wedge x$, aleshores també val $\alpha \wedge \beta \vdash_C \beta \wedge \alpha$, per a qualssevol $\alpha, \beta \in Te$; això és el resultat d'aplicar una substitució (endomorfisme) tal que $\sigma(x) = \alpha$ i $\sigma(y) = \beta$.

Observeu que no he posat cap restricció sobre com és definida la funció C . Per a comprendre l'aplicabilitat de la LAA és important de remarcar que *qualsevol* funció que satisfaci les quatre propietats de la definició 4 és una lògica. Simplificant una mica, es podria dir que hi ha dos grans grups de procediments per a definir lògiques: els *procediments sintàctics*, on es recorre únicament a la manipulació de l'àlgebra de termes, i els *procediments semàntics*, on s'utilitza algun objecte extern al llenguatge, com les taules de veritat o les seves generalitzacions (les matrius lògiques), els arbres o les taules semàntics, els models relacionals (a l'estil «de Kripke»), els models algebraics, etc.

Gairebé tots els procediments sintàctics es basen en alguna noció de *càlcul deductiu*; el més conegut és el *mètode axiomàtic*. En el context de la Lògica moderna aquest mètode també és anomenat «a l'estil de Frege o de Hilbert», encara que les idees bàsiques del mètode es troben ja en Aristòtil, de qui les va adoptar Euclides per a sistematitzar els seus famosos *Elements de geometria*. Hilbert va propugnar, amb èxit, aquest mètode, convenientment refinat, com a paradigma per a la fonamentació de diferents branques de la matemàtica, començant per la geometria, a finals del segle XIX, i acabant per la fonamentació de la matemàtica en el seu conjunt.¹⁹ El mètode consisteix a designar determinats termes com a *axiomes*, i determinats procediments per a manipular termes (essencialment, per a obtenir termes a partir d'un o més termes donats) com a *regles de deducció*, i definir $\alpha \in C(\Gamma)$ si i només si existeix una *prova* de α a partir de Γ dins del sistema, és a dir, una successió finita de termes que partint d'axiomes i de termes de Γ i utilitzant només les regles de deducció, arribi a produir el terme α . Un altre mètode sintàctic molt conegut es basa en càlculs de seqüents (també anomenats «sistemes de Gentzen»). Hi

¹⁹ I en aquest darrer intent hauríem de dir que no va reeixir, o almenys no del tot, i no perquè no fos prou hàbil, sinó perquè el mètode, aplicat a l'aritmètica dels nombres naturals, tenia unes limitacions inherents que ho impediien, cosa que va descobrir Gödel, com és ben sabut.

ha generalitzacions, com els càlculs de seqüents multidimensionals, els càlculs d'hiperseqüents, els càlculs de seqüents etiquetats, etc.

Cada mètode intenta implementar matemàticament una certa idea de conseqüència, que segons la lògica de què es tracti es basarà en intuïcions diverses. Per a les lògiques definides sintàcticament, hom pretén identificar conseqüència amb *demostració*, i hom intenta formalitzar idees sobre com són o haurien de ser les demostracions fetes amb aquella lògica, o quins haurien de ser els seus teoremes; casos típics d'aquest estil són la *lògica intuïcionista*, l'amplíssim grup de les *lògiques modals*, i les *lògiques de la rellevància*, totes sorgides al primer terç del segle xx, i les *lògiques subestructurals*, sorgides o sistematitzades al darrer terç. Per a les lògiques definides semànticament, hom identifica conseqüència amb *transmissió de la veritat* i, per tant, hom construeix models matemàtics de la noció de veritat de què es tracti i els utilitza de diferents maneres per a definir la lògica; la idea més utilitzada respon a l'esquema següent: $\alpha \in C(\Gamma)$ si i només si en tot model on els termes de Γ siguin veritat, α també és veritat. Els exemples paradigmàtics d'aquest tipus de lògiques són la lògica anomenada *clàssica*, definida per les conegudes taules de veritat amb dos valors («cert» i «fals»), representats matemàticament per 0 i 1), i les *lògiques multivalorades*, sorgides també al primer terç del segle xx, però que no han estat estudiades seriosament fins al darrer terç, a causa de les seves aplicacions.

És natural que a partir d'una de les definicions, es vulgui trobar una formulació equivalent de l'altre tipus, és a dir, buscar un càlcul deductiu per a les lògiques definides semànticament, o buscar una semàntica per a les lògiques definides sintàcticament; si es troba, el teorema que prova la coincidència s'anomena *teorema de completesa*.

Ara bé, tot el que he comentat als darrers tres paràgrafs no és en el nostre cas decisiu: a la Lògica Algebraica ens ocupem precisament de les propietats de les lògiques que no depenen de la manera com estan definides.²⁰

7 Subconjunts especials amb significació lògica

Ara ja es poden definir els subconjunts amb significació lògica. Són les teories i els filtres. Breument: les teories són els conjunts de termes tancats sota la conseqüència de la lògica, i els filtres són subconjunts d'una àlgebra amb la mateixa propietat, però a través de les interpretacions, ja que la conseqüència només opera sobre termes.

5 DEFINICIÓ Sigui C una lògica i $\Gamma \subseteq \mathbf{Te}$. Γ és una *teoria de C* quan, si $\Delta \subseteq \Gamma$, també $\alpha \in \Gamma$ per tot $\alpha \in C(\Delta)$.

Sigui A una àlgebra i $F \subseteq A$. F és un *filtre de C* , o un *C -filtre*, quan si $\Delta^A(\bar{a}) \subseteq F$, també $\alpha^A(\bar{a}) \in F$ per a tot $\alpha \in C(\Delta)$ i per a tota interpretació $\bar{a} \in \text{Hom}(\mathbf{Te}, A)$.

²⁰ Al contrari del que passa, per exemple, en altres branques de la Lògica, com la Teoria de la Demostració. Curiosament, en aquesta hom ha trobat fa poc aplicacions dels mètodes de la LAA; vegeu, per exemple, [4].

NOTACIÓ: $ThC = \{\text{teories de } C\}$ i $\mathcal{F}i_C A = \{F \subseteq A : F \text{ és un } C\text{-filtre en } A\}$.

El cas on és més fàcil visualitzar les teories i els filtres és aquell on C ve definida per un sistema axiomàtic: les teories són els conjunts de termes que contenen els axiomes i són tancats per les regles de deducció, i els filtres el mateix, mòdul les interpretacions: són els subconjunts d'una àlgebra que contenen totes les interpretacions dels axiomes i són tancats per a totes les regles de deducció, degudament interpretades.

És fàcil veure, gràcies a la propietat 4 de la definició 4, que $\mathcal{F}i_C Te = ThC$. Clarament, doncs, els filtres són la generalització de les teories; informalment, es podria dir que són «teories sobre una àlgebra arbitrària». Tenim una altra terminologia, més intuïtiva:

6 DEFINICIÓ Un *model (algebraic)* d'una lògica C és un parell $\langle A, F \rangle$ tal que F és un C -filtre sobre A . Un model és *reduït* quan $\Omega_A F = Id_A$, la identitat sobre A , és a dir, quan $a \equiv b (\Omega_A F) \iff a = b$.

Per tant, en un model reduït només hi ha una congruència compatible amb el filtre, la identitat; no és, doncs, possible identificar dos elements sense trencar el C -filtre F . Podríem dir que en un model reduït totes les identificacions que respecten (el model de) la lògica ja han estat fetes. Ara bé, recordem que la compatibilitat i la congruència de Leibniz només depenen de l'estructura algebraica. Per tant, que un model $\langle A, F \rangle$ sigui reduït o no ho sigui no depèn de quina lògica C estem considerant; C només intervé per a determinar si $\langle A, F \rangle$ és model de C o no, és a dir, de si F és C -filtre o no ho és, però no per a determinar si és reduït, fet que només depèn de A i F .

A partir d'un model $\langle A, F \rangle$ qualsevol, factoritzant mòdul la congruència de Leibniz, s'obté $\langle A/\Omega_A F, F/\Omega_A F \rangle$, un model reduït de la mateixa lògica. És fàcil entendre per què es vol treballar amb models reduïts. En un model no reduït, per definició tindrem elements que, malgrat ser diferents, són «equivalents» des del punt de vista de la lògica. Per exemple, si segons la lògica els termes $x \wedge y$ i $y \wedge x$ són equivalents, un model on $a \wedge b = b \wedge a$ per tots els $a, b \in A$ serà preferible a un on hi hagi a, b tals que $a \wedge b \neq b \wedge a$, malgrat que $a \wedge b \equiv b \wedge a (\Omega_A F)$. Sempre preferiríem que el model fos reduït.

La primera aplicació d'aquestes idees és poder donar una definició general de la classe d'àlgebres associada a una lògica, el que s'anomena informalment *la contrapartida algebraica d'una lògica*. A la literatura podem trobar les definicions de dues classes d'àlgebres (en principi diferents) que es poden associar a cada lògica, la tradicional \mathbf{Alg}^*C [56, 63] i la més recent $\mathbf{Alg}C$ [28]:

7 DEFINICIÓ $\mathbf{Alg}^*C = \{A : \Omega_A F = Id_A \text{ per algun } F \in \mathcal{F}i_C A\}$.

$$\mathbf{Alg}C = \{A : \bigcap_{F \in \mathcal{F}i_C A} \Omega_A F = Id_A\}.$$

La definició de \mathbf{Alg}^*C és fàcil de visualitzar: és la classe de totes les àlgebres sobre les quals hi ha algun model reduït de C . Semblen, doncs, les àlgebres

que poden «funcionar bé» com a models algebraics de C . És normal que fos la primera definició general que s'estudiés. Si C és la lògica clàssica, \mathbf{Alg}^*C és la classe de les àlgebres de Boole, com era d'esperar, i sobre aquestes els C -filtres són els filtres en el sentit algebraic de la paraula (concretament, els filtres reticulars; vegeu la nota 12). Per a la lògica intuicionista, obtenim les àlgebres de Heyting, també amb els filtres reticulars. Per a $S4$, una de les lògiques modals més conegudes,²¹ obtenim les àlgebres de Boole topològiques i els filtres que són oberts. Per a la lògica amb infinits valors de Łukasiewicz,²² les àlgebres de Wajsberg i els seus filtres implicatius, etc.

Pel que fa a la descripció de $\mathbf{Alg}C$, cal reconèixer que no és a primera vista gaire directa.²³ La intersecció de congruències de Leibniz que hi apareix no ha de coincidir necessàriament amb la congruència de Leibniz d'un C -filtre concret, i per aquest motiu en general només podem assegurar que $\mathbf{Alg}^*C \subseteq \mathbf{Alg}C$.

És comú referir-se a les àlgebres de \mathbf{Alg}^*C o de $\mathbf{Alg}C$ com a *àlgebres de Lindenbaum-Tarski* de la lògica C . El motiu és que aquestes àlgebres es poden obtenir a partir de l'àlgebra de termes \mathbf{Te} per mitjà d'una construcció que generalitza la que va fer Tarski [60], basant-se en idees de Lindenbaum, quan va mostrar per primera vegada (1935) la connexió exacta entre la lògica clàssica i les àlgebres de Boole. Deixem constància del resultat precís, en la seva formulació actual:

8 TEOREMA *Siguin C una lògica i A una àlgebra qualssevilla. Aleshores:*

1. $A \in \mathbf{Alg}^*C$ si i només si A és isomorfa a una àlgebra de la forma $\mathbf{Te}/\Omega_{\mathbf{Te}}\Gamma$, essent \mathbf{Te} l'àlgebra de termes generada per un conjunt de variables de cardinal convenient, i $\Gamma \subseteq \mathbf{Te}$ una teoria de C .
2. $A \in \mathbf{Alg}C$ si i només si A és isomorfa a una àlgebra de la forma $\mathbf{Te}/\tilde{\Omega}_{\mathbf{Te}}\Gamma$, essent \mathbf{Te} l'àlgebra de termes generada per un conjunt de variables de cardinal convenient, $\tilde{\Omega}_{\mathbf{Te}}\Gamma = \bigcap \{\Omega_{\mathbf{Te}}\Delta : \Delta \in \mathbf{Th}C, \Gamma \subseteq \Delta\}$, i $\Gamma \subseteq \mathbf{Te}$ una teoria de C .

No hi ha prou espai per a discutir aquestes definicions i aquests resultats i emmarcar-los en el context teòric adequat. Deixeu-me només dir dues coses:

²¹ La lògica $S4$ és una extensió de la lògica clàssica amb dos operadors unaris addicionals, que es denoten usualment amb \Box i \Diamond . Va ser definida sintàcticament, a començaments del segle XX , per motius filosòfics (els operadors \Box i \Diamond representaven les idees «és necessari que» i «és possible que»), però el 1944 McKinsey i Tarski [48] van modelar $S4$ en l'àlgebra de subconjunts d'un espai topològic, interpretant aquests operadors com la formació de l'interior i l'adherència d'un subconjunt, i van provar que aquesta lògica és completa respecte de la topologia de la recta real, o bé de la recta racional, o de l'espai de Cantor, i també que és completa respecte de la classe de tots els espais topològics. Per tant, la podríem considerar com la *lògica de la topologia*. Més endavant ha trobat d'altres aplicacions, la majoria relacionades amb la Informàtica.

²² La lògica multivalorada més famosa, que té com a valors de veritat tot l'interval $[0, 1]$ real. Va ser introduïda als anys vint del segle passat, per motius purament especulatius, filosòfics, i posteriorment ha mostrat la seva utilitat en la fonamentació de les anomenades *lògiques borroses*, que s'utilitzen a la intel·ligència artificial.

²³ Una descripció més intuïtiva s'obtidria considerant *models generalitzats*, una noció que no apareixerà en aquest article. S'ha demostrat [28, teorema 2.23] que $\mathbf{Alg}C$ també es pot obtenir fent la clausura de \mathbf{Alg}^*C per productes subdirectes.

una, que hi ha una evidència empírica molt forta per a sostenir que **AlgC** és la definició correcta, amb la màxima generalitat, de la noció de «contrapartida algebraica d'una lògica». S'ha comprovat que en les lògiques estudiades tradicionalment, on **Alg***C funcionava bé,²⁴ com les esmentades abans, resulta que **AlgC** = **Alg***C, mentre que en d'altres casos on **Alg***C dóna resultats no significatius des del punt de vista lògic, **AlgC** ha donat el resultat esperat.²⁵ L'altra, que aquestes definicions, els conceptes en què es basen, i aquells a què donen lloc, han originat una teoria ben estructurada i amb resultats prou complexos, d'abast més ampli que els que es poden obtenir treballant només amb **Alg***C.

8 L'operador de Leibniz i la jerarquia de Leibniz

Ja tenim tots els ingredients que calen per a progressar en l'anàlisi de la congruència de Leibniz. Observeu que $\mathcal{F}i_C A$ és una família de parts de A i, per tant, és ordenada per la relació \subseteq . És més, com a conjunt ordenat, $\mathcal{F}i_C A$ és un reticle complet.²⁶ És fàcil veure que si $F \in \mathcal{F}i_C A$, aleshores $\Omega_A F \in \text{CoAlg} C A$. Pel que fa a aquest darrer conjunt, que com tots els de la forma $\text{Co}_K A$ és ordenat (vegeu la nota 11), també és un reticle complet. Per tant, com us podeu imaginar, el que ens interessa de la funció (7), esmentada a la pàgina 84, és la restricció

$$\Omega_A : \mathcal{F}i_C A \rightarrow \text{CoAlg} C A.$$

Aquest és el que s'anomena l'*operador de Leibniz* en LAA. El seu estudi, pel que fa a les propietats de l'ordre, reticulars, i la seva definibilitat, ha originat una classificació de les lògiques en diferents classes, sota diferents criteris, organitzades en el que s'anomena la *jerarquia de Leibniz*.

A la figura 1 trobem representades les classes més importants. La fletxa indica inclusió entre classes. En comento algunes. La més petita de les que hi mostro és la classe de les *lògiques implicatives*, descrita i estudiada amb els mètodes tradicionals per Rasiowa en [56]. També el 1974, Prucnal i Wroński [53] van introduir les *lògiques equivalencials*, que van ser estudiades a fons per Czelakowski el 1981, en dos articles, [16], que comporten un canvi metodològic en la Lògica Algebraica. La revolució més important, però, es va produir amb l'aparició de les *lògiques protoalgebraiques* el 1986 i de les *lògiques algebritzables* el 1989; ambdues van ser descobertes per Blok i Pigozzi [7, 8]. Les *lògiques*

²⁴ Això de «funcionava bé» es podria precisar, no és una simple vaguetat, però l'espai no dóna per a més. Vegeu, per exemple, el teorema 9.

²⁵ Aquests casos no s'han començat a identificar fins al final de la dècada dels vuitanta del segle passat. El primer, i exemple paradigmàtic per la seva simplicitat, va ser el fragment de la lògica clàssica amb només conjunció i disjunció [32], que dóna lloc a la classe dels reticles distributius. Per citar només dos exemples més: al fragment de la lògica intuicionista sense implicació [58] li correspon la classe dels reticles pseudocomplementats, i a la lògica a quatre valors de Belnap [5, 25] li corresponen les àlgebres de De Morgan. En tots aquests casos, **Alg***C resulta una classe d'àlgebres massa petita, que no té un significat lògic específic.

²⁶ Un reticle és *complet* si qualsevol subconjunt té suprem i ínfim.

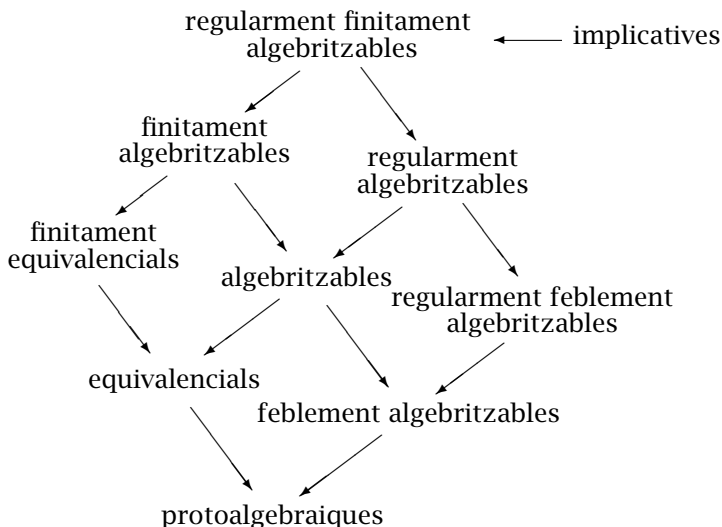


FIGURA 1: Les principals classes de la jerarquia de Leibniz.

feblement algebritzables van ser introduïdes el 1996 a [28], i van ser estudiades a fons a [19].

La classe més gran de la jerarquia és la de les lògiques protoalgebraiques,²⁷ que és considerada la classe de lògiques més gran on els mètodes basats en l'estudi dels filtres a través de l'operador de Leibniz funcionen raonablement bé. Per exemple, a [28] es demostra:

9 TEOREMA *Si C és una lògica protoalgebraica, aleshores $\mathbf{Alg}^*C = \mathbf{Alg}C$.*

El nom de *jerarquia de Leibniz* prové del fet que, encara que algunes d'aquestes classes de lògiques es van definir sense cap relació amb l'operador de Leibniz, posteriorment la majoria s'han pogut caracteritzar per diferents propietats d'aquest operador, ja sigui sobre àlgebres arbitràries, ja sigui sobre l'àlgebra de termes. Moltes, amb propietats referents a l'estructura d'ordre i reticular com les següents:

- *Monotonia:* $F \subseteq G \Rightarrow \Omega_A F \subseteq \Omega_A G$.
- *Injectivitat:* $F = G \Leftrightarrow \Omega_A F = \Omega_A G$.
- *Commutativitat amb substitucions:* $\sigma \circ \Omega_{Te} \circ C \subseteq \Omega_{Te} \circ C \circ \sigma$, per a cada $\sigma \in \text{End}(Te)$.
- *Commutativitat amb homomorfismes inversos:* $\Omega_A \circ h^{-1} = h^{-1} \circ \Omega_B$, per a cada $h : A \rightarrow B$.

²⁷ Per aquest motiu, també es parla de la *jerarquia protoalgebraica*.

- *Commutativitat amb interseccions:* $\Omega_A(\bigcap_{i \in I} F_i) = \bigcap_{i \in I} \Omega_A F_i$.
- *Continuïtat*, és a dir, commutativitat amb unions de famílies dirigides superiorment: $\Omega_A(\bigcup_{i \in I} F_i) = \bigcup_{i \in I} \Omega_A F_i$.
- *Isomorfisme reticular:* $\Omega_A : \mathcal{F}i_C A \cong \text{CoAlg}_C A$.

(Els F, G, F_i són C -filtres sobre l'àlgebra A corresponent.)

Aquestes propietats es poden combinar de diverses maneres en les caracteritzacions d'algunes de les classes de la jerarquia. Podeu veure-ho al llibre [17], que conté un estudi a fons de totes les classes de la jerarquia (incloent-hi algunes que no surten a la figura) i recull tot el que se sabia en el seu moment, i amb molts resultats inèdits.

Cal dir que algunes d'aquestes classes tenen també caracteritzacions alternatives sorgides de perspectives molt diferents; això ens indica que estem davant d'una teoria realment rica i profunda.

9 Lògiques algebritzables: isomorfismes

Com a exemple exposaré amb més detall un cas de conducta particularment bona, el de les lògiques algebritzables. Aquestes lògiques són una generalització relativament natural de les lògiques implicatives, i algunes de les idees sobre la seva algebrització eren ja presents, implícites, en treballs més antics de Lògica Algebraica. El que va ser realment revolucionari, i que d'alguna manera va crear el camp que ara s'anomena Lògica Algebraica Abstracta (LAA), va ser la teoria matemàtica que van construir al seu voltant, primer Blok i Pigozzi, i després d'altres, com Czelakowski, Herrmann, Raftery, etc., i a la qual alguns lògics catalans hem aportat també la nostra contribució.

A la secció següent en donarem la definició original. Per ara, considerem diverses caracteritzacions, recollides en un sol resultat (qualsevol d'aquestes es podria prendre com a definició, és clar):

10 TEOREMA *Si C és una lògica, les propietats següents són equivalents:*

- i) C és algebritzable.
- ii) La funció Ω_{Te} és injectiva, monòtona i commuta amb substitucions inverses.
- iii) $\Omega_{Te} : \mathcal{Th}C \cong \text{CoAlg}_C Te$ és un isomorfisme reticular que commuta amb substitucions inverses.
- iv) Per a qualsevol àlgebra A , la funció $\Omega_A : \mathcal{F}i_C A \cong \text{CoAlg}_C A$ és un isomorfisme reticular que commuta amb homomorfismes inversos.

Els resultats d'aquest tipus sovint s'anomenen *teoremes d'isomorfisme*.

Les caracteritzacions iii) i iv) requereixen explícitament el coneixement de la classe Alg_C , i fan referència a les congruències relatives a aquesta classe, segons la definició de (2), pàgina 81. En canvi, observem que ii) no ho requereix;

per a comprovar-la només hem d'estudiar l'operador de Leibniz sobre les teories, és a dir, sobre l'àlgebra de termes. Per això es diu que és una *caracterització intrínseca*. També és una *caracterització abstracta* de l'operador de Leibniz, en el sentit que, sota condicions raonables, Ω_{Te} és l'únic operador entre les teories i les congruències de l'àlgebra de termes que compleix les propietats de ii).

Possiblement, la condició més interessant és iv), tant des del punt de vista teòric com del pràctic. Un fet que cal remarcar és que l'isomorfisme entre filtres i congruències relatives que s'hi postula no val només per a les àlgebres de $\mathbf{Alg}C$, cosa que seria la generalització dels esquemes (3), (4) o (5) de la secció 3, sinó que val *per a qualsevol àlgebra* A (evidentment, del tipus de similaritat de què es tracta). A més, determina de manera única la classe $\mathbf{Alg}C$: Sota certes condicions, es pot demostrar que si C és una lògica i existeix una classe d'àlgebres \mathbf{K} tal que per a tota A ,

$$\Omega_A : Fi_C A \cong Co_{\mathbf{K}} A \quad (8)$$

és un isomorfisme reticular que commuta amb homomorfismes inversos, aleshores per força C ha de ser algebritzable, i $\mathbf{K} = \mathbf{Alg}C$.

L'aspecte pràctic més important de iv) és que *pot permetre provar que una determinada lògica no és algebritzable*. Recordem que l'operador de Leibniz està determinat per l'estructura algebraica de l'àlgebra subjacent, i que si C fos algebritzable iv) valdria per a tota àlgebra A . Aleshores, analitzant el comportament de Ω_A sobre els C -filtres en una àlgebra petita o prou convenient, podem veure si és o no un isomorfisme, i en el segon cas, concloure que la lògica no serà algebritzable.

En aquest sentit, la importància de la definició d'algebritzabilitat de Blok i Pigozzi (posteriorment generalitzada en diversos sentits) i les seves caracteritzacions, es pot comparar a la importància del descobriment de les definicions matemàtiques de la noció de computabilitat a la dècada dels trenta. Abans de 1989 hi havia una idea informal de què volia dir que una lògica es pogués «algebritzar»; sobretot, el que hi havia eren molts casos particulars on això clarament es podia fer, en qualsevol sentit raonable de l'expressió. A partir de 1989, tenim una definició matemàtica rigorosa, que ha permès provar que certes lògiques *no* es poden algebritzar.

Però és més, el teorema 10 pot permetre quelcom més insòlit: provar que una determinada classe d'àlgebres \mathbf{K} *no és la contrapartida algebraica de cap lògica algebritzable*. Si fos $\mathbf{K} = \mathbf{Alg}C$ per a una C algebritzable, s'hauria de complir (8) per a tota A . Aquí el problema és que no partim de cap C , per tant, no coneixem $Fi_C A$. Ara bé, coneixem \mathbf{K} i, per tant, $Co_{\mathbf{K}} A$ per a qualsevol A , i també Ω_A sobre $\mathcal{P}(A)$, i insisteixo un cop més que tots aquests objectes són purament algebraics i no depenen de cap lògica. Per tant, els podem computar en àlgebres convenients. I en alguns casos ha estat possible de veure que, fos com fos el reticle dels C -filtres, encara que no coneguem C , seria impossible que Ω_A fos un isomorfisme sobre $Co_{\mathbf{K}} A$ i, per tant, no és possible

que \mathbf{K} correspongui a cap lògica algebritzable. Exemples una mica sorprenents d'aquesta situació són algunes classes d'àlgebres gens patològiques, com la classe de tots els reticles distributius [32] o les àlgebres de De Morgan [25].²⁸ De tota manera, aquestes aplicacions són rares i requereixen trucs enginyosos.

Hi ha teoremes semblants per a d'altres classes de la jerarquia. Per exemple, si s'eliminen del teorema 10 les condicions sobre commutativitat amb substitucions o homomorfismes inversos, s'obté el teorema que correspon a les lògiques feblement algebritzables [19, 28]. Si es canvia en ii) «monòtona i commuta amb substitucions inverses» per «contínua», es troben les lògiques finitament algebritzables; en aquest cas, si a més la lògica C és finitària,²⁹ es pot fer un canvi similar en iii) i en iv). Vegeu [17].

Així, doncs, el significat lògic de les congruències (relatives) és el de representar les teories (i els filtres) de les lògiques associades a la classe d'àlgebres de què es tracta. Aquesta «representació» es fa a través de l'operador de Leibniz. Pel que fa a la pràctica, però, veiem que aquest operador està definit d'una manera bastant abstracta (6), i la caracterització del teorema 1 involucra la totalitat de les funcions polinòmiques sobre una àlgebra. Així no sembla fàcil visualitzar com funciona aquesta «representació». Per a veure-ho millor hem de recórrer a un altre dels aspectes de l'operador que també s'estudien, la seva *definibilitat*.

10 Lògiques algebritzables: definibilitat i traduccions

En el cas de les lògiques examinades a la secció anterior, resulta que tant l'isomorfisme Ω_A com el seu invers són «definibles algebraicament», és a dir, amb l'ajut dels termes i de les equacions del llenguatge algebraic:

11 TEOREMA *Sigui C una lògica algebritzable. Aleshores:*

- a) *Existeix un conjunt $\Delta(x, y) \subseteq Te$ de termes binaris (és a dir, on apareixen com a màxim les variables x, y) tal que per a qualsevol A , qualsevol $F \in \mathcal{F}i_C A$ i qualssevol $a, b \in A$,*

$$a \equiv b (\Omega_A F) \iff \Delta^A(a, b) \subseteq F. \quad (9)$$

- b) *Existeix un conjunt d'equacions unàries $E(x) \subseteq Te \times Te$, amb la variable x com a màxim, tal que per a qualsevol A i qualsevol $\theta \in \text{CO}_{\mathbf{Alg} C} \mathbf{Te}$,*

$$F = \Omega_A^{-1}(\theta) = \{a \in A : \delta^A(a) \equiv \varepsilon^A(a) (\theta) \quad \forall \delta \approx \varepsilon \in E(x)\}. \quad (10)$$

²⁸ Com hem vist a la nota 25, ambdues classes d'àlgebres són de la forma $\mathbf{Alg} C$, però per a lògiques C no algebritzables, i de fet ni tan sols protoalgebraiques.

²⁹ Una lògica C és *finitària* o *compacta* quan tota conseqüència a partir de certes premisses es pot obtenir a partir d'un nombre finit d'aquestes: Si $\beta \in C(\Gamma)$ aleshores $\beta \in C(\Delta)$ per a algun Δ finit, $\Delta \subseteq \Gamma$. Les lògiques definides per sistemes axiomàtics (en el sentit usual de la paraula) ho són sempre.

És a dir, la congruència associada al filtre és definible a partir del filtre, usant certs termes expressables en el llenguatge de les àlgebres associades. I recíprocament, donada la congruència, el filtre que li correspon és definible a partir de la congruència ja que resulta que és el conjunt d'elements que «compleixen» un cert conjunt d'equacions mòdul la congruència.

Pot ser interessant de saber que, de fet, la condició a) del teorema 11 caracteritza les lògiques *equivalencials*. Una propietat similar, però on el conjunt Δ pot contenir paràmetres (unes altres variables a més de x, y), caracteritza les lògiques *protoalgebraiques*. Les lògiques *feblement algebraitzables* compleixen b), i en cert sentit aquesta propietat les caracteritza dintre de les lògiques protoalgebraiques, però cal reformular-la sense pressuposar que Ω_A és invertible.³⁰ A la figura 1 apareixen també diferents classes de lògiques que afegeixen el qualificatiu *finitament* a una de les altres; la condició que cal afegir és que, en a), el conjunt Δ sigui finit.

És fàcil adonar-se que les expressions (9) i (10) dels isomorfismes del teorema 10 generalitzen els esquemes purament algebraics (3)–(5) vistos a la secció 3. En el cas de les àlgebres de Boole això és molt clar, ja que tothom sap que les àlgebres de Boole es corresponen amb la lògica sentencial clàssica, de manera que l'equivalència de termes sota una teoria o un filtre es defineix a partir de l'operació o «connectiva» d'equivalència \leftrightarrow , i que en tota àlgebra de Boole el màxim 1 representa tots els teoremes de la lògica clàssica, i els filtres (de reticle) són els filtres de la lògica clàssica (en el sentit de la definició 5). Veiem, doncs, que l'isomorfisme de (5) és, efectivament, el dels teoremes 10 i 11, amb

$$\Delta(x, y) = \{x \leftrightarrow y\} \quad \text{i} \quad E(x) = \{x \approx 1\}. \quad (11)$$

De fet, hi ha una gran quantitat de lògiques algebraitzables on els isomorfismes es defineixen d'aquesta manera.³¹

Els isomorfismes de (3), pàgina 81, per al cas dels anells, semblen també definibles prenent $\Delta(x, y) = \{x - y\}$ i $E(x) = \{x \approx 0\}$: en efecte, ja sabem que si I és un ideal d'un anell A , i θ és la congruència mòdul I , aleshores $a \equiv b \ (\theta) \iff a - b \in I \iff \Delta^A(a, b) \subseteq I$, de manera que $\theta = \Omega_A I$. I si θ és una congruència qualsevol i computem $\Omega_A^{-1}(\theta)$ segons (10) obtenim $\Omega_A^{-1}(\theta) = \{a \in A : a \equiv 0 \ (\theta)\} = 0/\theta$, que és l'ideal associat a la congruència segons (3). Per tant, l'isomorfisme habitual entre ideals i congruències en anells es comporta igual que l'operador de Leibniz de les lògiques algebraitzables. És lícit, doncs, sospitar que en els isomorfismes de (3) hi ha amagada una lògica algebraitzable C tal que **Alg** C és la classe dels anells i els C -filtres són els ideals, cosa que faria que (3) fos efectivament, un cas particular del teorema 10.

³⁰ Concretament, una lògica C és feblement algebraitzable si i només si és protoalgebraica i existeix un conjunt d'equacions unàries $E(x)$ tal que per a tot C -filtre F sobre una àlgebra A arbitrària, $F = \{a \in A : \delta^A(a) \equiv \varepsilon^A(a) \ (\Omega_A F) \ \forall \delta \approx \varepsilon \in E(x)\}$.

³¹ La connectiva o operació d'equivalència \leftrightarrow no acostuma a ser primitiva; normalment, $x \leftrightarrow y$ es defineix com $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$. Quan no hi ha la conjunció \wedge al llenguatge, es pren el conjunt $\Delta(x, y) = \{x \rightarrow y, y \rightarrow x\}$.

Realment existeix aquesta lògica? Com es pot definir i axiomatitzar? Ho deixaré per al final d'aquesta secció.

La clau és que els termes $\Delta(x, y)$ i les equacions $E(x)$ tenen encara un altre paper en la descripció de la relació entre les lògiques algebritzables i les seves àlgebres associades, un paper d'alguna manera més bàsic que el de determinar l'operador de Leibniz i el seu invers: aquests termes i aquestes equacions permeten d'establir *traduccions* entre equacions i termes, respectivament, de manera que la lògica sentencial C resulti *equivalent*, en cert sentit precís, a la conseqüència equacional relativa a una certa classe d'àlgebres \mathbf{K} , la conseqüència que he denotat amb $\models_{\mathbf{K}}$ a la secció 2; més endavant es veurà com apareix **AlgC** en aquesta situació.

12 DEFINICIÓ Siguin $E(x) \subseteq Te \times Te$ i $\Delta(x, y) \subseteq Te$. Aleshores

a) La funció $\tau : \mathcal{P}(Te) \rightarrow \mathcal{P}(Te \times Te)$ es defineix, per a $\alpha \in Te$ i $\Gamma \subseteq Te$:

$$\tau(\alpha) := E(\alpha) \quad \text{i} \quad \tau(\Gamma) := \bigcup_{\alpha \in \Gamma} \tau(\alpha), \quad (12)$$

on, per comoditat, escrivim $\tau(\alpha)$ en comptes de $\tau(\{\alpha\})$.

b) La funció $\rho : \mathcal{P}(Te \times Te) \rightarrow \mathcal{P}(Te)$ es defineix, per a $\delta \approx \varepsilon \in Te \times Te$ i $\Theta \subseteq Te \times Te$:

$$\rho(\delta \approx \varepsilon) := \Delta(\delta, \varepsilon) \quad \text{i} \quad \rho(\Theta) := \bigcup_{\delta \approx \varepsilon \in \Theta} \rho(\delta \approx \varepsilon), \quad (13)$$

on, per comoditat, escrivim $\rho(\delta \approx \varepsilon)$ en comptes de $\rho(\{\delta \approx \varepsilon\})$.

El paper d'aquestes traduccions queda reflectit en la definició més directa i original³² de la noció de *lògica algebritzable*, que tot seguit comentaré en detall; aquí serà útil la notació relacional \vdash_C en comptes de l'operacional C per a la conseqüència de la lògica.

13 DEFINICIÓ Una lògica C és *algebritzable* quan existeixen una classe d'àlgebres \mathbf{K} i dues traduccions τ i ρ , definides per conjunts de termes $\Delta(x, y)$ i d'equacions $E(x)$ en la forma descrita a la definició 12, que compleixen:

- (A1) $\Gamma \vdash_C \alpha \iff \tau(\Gamma) \models_{\mathbf{K}} \tau(\alpha)$
- (A2) $\Theta \models_{\mathbf{K}} \delta \approx \varepsilon \iff \rho(\Theta) \vdash_C \rho(\delta \approx \varepsilon)$
- (A3) $\alpha \dashv\vdash_C \rho \circ \tau(\alpha)$
- (A4) $\delta \approx \varepsilon \models\!\!\models_{\mathbf{K}} \tau \circ \rho(\delta \approx \varepsilon)$.

³² De fet, la noció original deguda a Blok i Pigozzi [8] pressuposava que la lògica és finitària i que els conjunts $E(x)$ i $\Delta(x, y)$ són finits. Aquestes limitacions s'han eliminat posteriorment, cosa que ha permès cobrir més casos, i bastir una teoria general més robusta. Per això ara de vegades es parla de lògiques «algebritzables en el sentit de Blok i Pigozzi» quan es pressuposen les limitacions esmentades; malgrat això, pel que fa a les aplicacions hom observa una certa vaguetat i manca de consistència en la terminologia, fet que no sorprèn pas en una teoria tan jove.

També diem que les conseqüències \vdash_C i \models_K són *deductivament equivalents*. Els símbols $\dashv\vdash_C$ i $\dashv\vdash_K$ signifiquen, òbviament, les simetritzacions de les relacions respectives \vdash_C i \models_K , és a dir, la conseqüència en tots dos sentits.

Es diu que les dues conseqüències son deductivament equivalents perquè cadascuna de les relacions de conseqüència és equivalent, en un sentit precís i molt fort, a l'altra; i l'equivalència té lloc a través de les traduccions. A continuació comentaré una mica cadascuna de les condicions.³³

La condició (A1) és una forma bastant general i abstracta del que normalment s'anomena un *teorema (algebraic) de completesa*. Ens diu que una conseqüència entre termes (en la lògica C) equival a una conseqüència entre les equacions resultants de la traducció τ (en la lògica equacional relativa \models_K). Si mirem què passa en el cas de la lògica clàssica i les àlgebres de Boole trobarem fets prou coneguts. Aplicant (12) a (11), tenim que $\tau(\alpha) := \{\alpha \approx 1\}$; per tant, (A1) ens diu que un terme α és una conseqüència (clàssica) d'un conjunt de termes Γ si i només si en tota àlgebra de Boole, sempre que tots els termes de Γ valguin 1 en una interpretació, α també valdrà 1 en la mateixa interpretació. I en aquest cas es dona una circumstància menys comuna: no cal considerar totes les àlgebres de Boole, n'hi ha prou considerant interpretacions en la coneguda àlgebra de Boole de dos elements,³⁴ l'àlgebra d'univers $2 = \{0, 1\}$; en definitiva, això no és altra cosa que les nostres velles conegudes, les *taules de veritat* bivalorades!

Si una classe d'àlgebres \mathbf{K} compleix la propietat (A1) per a una lògica C amb una certa traducció τ , diem que \mathbf{K} és una *semàntica algebraica* per a C . Trobar una completesa algebraica d'aquesta mena, i explotar-la, era l'objectiu típic dels estudis algebraics de les lògiques fins a mitjan segle XX. Podem trobar molts articles d'aquesta època on la relació entre una lògica i una classe d'àlgebres es descrivia amb frases similars a aquesta:

pel que fa a la lògica Y , la classe d'àlgebres Z té un paper similar al de les àlgebres de Boole respecte de la lògica clàssica,

i en realitat només es pensava en la propietat (A1). L'interessant és que això no és tot, ni de bon tros! El descobriment realment revolucionari de Blok i Pigozzi a [8] va ser adonar-se que les relacions entre les àlgebres de Boole i la lògica clàssica, i entre altres exemples coneguts de lògiques no clàssiques i la seva contrapartida algebraica, *van molt més enllà de la completesa algebraica*, són molt més que simplement posseir una semàntica algebraica.³⁵ D'entrada, te-

³³ És fàcil provar que (A1)+(A4) \Leftrightarrow (A2)+(A3), de manera que cadascun d'aquests parells de condicions ja defineixen l'algebritzabilitat. Però tant per raons de simetria com pel seu significat, és aconsellable tenir sempre en compte les quatre condicions alhora.

³⁴ La propietat algebraica que hi ha al darrere d'això és que la classe de totes les àlgebres de Boole està generada, com a *classe implicacional* o *quasi-varietat*, per l'àlgebra de dos elements. Això vol dir, per exemple, que és la classe de totes les àlgebres que es poden obtenir a partir de la de dos elements fent un nombre finit de vegades, i en qualsevol ordre, les operacions de construir productes reduïts, construir subàlgebres i construir imatges isomorfes; vegeu [14].

³⁵ De fet, en [11], un dels pocs articles dedicats a analitzar aquesta propietat despullada d'altres, es mostra que una semàntica algebraica pot ser molt poc natural; per exemple, les àlgebres de

nim la propietat (A2), que és totalment simètrica de la (A1): ens diu que la conseqüència $\models_{\mathbf{K}}$ és equivalent a la conseqüència C mòdul l'altra traducció ρ ; podríem dir que és una completesa a la inversa. Un cop conegudes les traduccions, les condicions (A1) i (A2) permeten definir cadascuna de les conseqüències a partir de l'altra.

En el cas de la lògica clàssica, segons (11), tenim $\tau(\alpha) := \{\alpha \approx 1\}$ i $\rho(\delta \approx \varepsilon) := \{\delta \leftrightarrow \varepsilon\}$. Aquestes dues traduccions, d'alguna manera, fan realitat, a la fi del segle XX, el somni de Boole, que a partir de 1847 ja va mig intuir, en una forma molt rudimentària [12, 13], aquesta translació del raonament de la lògica formal (la clàssica, l'única que ell coneixia) al raonament amb equacions entre variables (que, en la seva primera aproximació, només podien prendre els valors 0 i 1, veritat i falsedat). Efectivament, limitant-nos per simplificar al cas $\Gamma = \emptyset$ i $\Theta = \emptyset$, (A1) ens diu que un terme (fórmula) α és un teorema de la lògica clàssica si i només si l'equació $\alpha \approx 1$ és vàlida a totes les àlgebres de Boole, i (A2) ens diu que una equació $\delta \approx \varepsilon$ és vàlida a totes les àlgebres de Boole si i només si el terme (fórmula) $\delta \leftrightarrow \varepsilon$ és un teorema de la lògica clàssica. Amb un altre llenguatge i en un altre context, Boole de fet va treballar a partir d'aquestes premisses, per a ell evidents.

Finalment, tenim les condicions (A3) i (A4), que ens diuen que, a més, aquestes dues traduccions són inverses l'una de l'altra relativament a les conseqüències, és a dir, que les dues composicions $\rho \circ \tau$ i $\tau \circ \rho$ són equivalents a la identitat (respectivament, sobre el conjunt de termes i el d'equacions) mòdul les conseqüències corresponents en cada cas (sobre els termes, la lògica C , i sobre les equacions, $\models_{\mathbf{K}}$). En el cas de la lògica clàssica, aquests dues condicions ens diuen que α i $\alpha \leftrightarrow 1$ són termes clàssicament equivalents, i que les equacions $\delta \approx \varepsilon$ i $\delta \leftrightarrow \varepsilon \approx 1$ són equivalents dintre de la classe de les àlgebres de Boole.

És interessant de saber que si una lògica C és algebritzable, hi pot haver moltes classes d'àlgebres \mathbf{K} que compleixin les condicions de la definició 13; clarament, totes les que engendrin la mateixa conseqüència $\models_{\mathbf{K}}$. Hom pot demostrar que una d'aquestes, i de fet la més gran, és la classe $\mathbf{Alg}C$, que aleshores rep el nom de *semàntica algebraica equivalent*³⁶ de la lògica C . Per exemple, per a la lògica clàssica podríem prendre tant $\mathbf{K} = \{2\}$ com $\mathbf{K} = \{\text{àlgebres de Boole finites}\}$, però només $\mathbf{K} = \{\text{totes les àlgebres de Boole}\}$ té realment sentit com a «contrapartida algebraica» de la lògica.

Observem que l'operador de Leibniz, que en el cas de l'algebritzabilitat estableix el lligam entre entitats lògiques i entitats algebraiques en definir l'isomorfisme entre teories (o filtres) i congruències relatives del teorema 10, no apareix directament a la definició 13. Però hi és amagat, ja que hom pot provar [6]:

Heyting, associades de forma canònica amb la lògica intuicionista, també formen una semàntica algebraica per a la lògica clàssica.

³⁶ Normalment s'aplica aquest qualificatiu a qualsevol de les classes \mathbf{K} que compleixen les condicions (A1)-(A4), però Raftery, amb molt bon sentit, ha proposat de reservar-lo per a la més gran, que esdevé, així, única.

14 TEOREMA *Sigui C una lògica algebritzable a través de les traduccions ρ i τ , segons les definicions 12 i 13. Considerem ρ i τ restringides als conjunts de les teories³⁷ de la conseqüència $\models_{\mathbf{Alg}C}$ i de C , respectivament. Aleshores, aquestes funcions són residuades, i els seus residus són respectivament l'operador de Leibniz Ω_{Te} i el seu invers, és a dir, $\Omega_{Te} = \rho^*$ i $\Omega_{Te}^{-1} = \tau^*$.*

Si $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$, el seu residu és una funció $f^* : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ tal que

$$X \subseteq f^*(Y) \iff f(X) \subseteq Y \quad (14)$$

per a tot $X \subseteq A$ i tot $Y \subseteq B$. El residu existeix si i només si la funció f compleix la condició de commutar amb unions arbitràries,³⁸ i està determinat per (14). En el nostre cas, la definició 12 implica directament que ρ i τ commuten amb unions arbitràries.

Tots aquests conceptes i resultats mostren que els coneguts fets algebraics (relacions entre ideals i congruències) tenen una indubtable significació lògica. Això s'ha revelat en tota la seva força quan s'ha bastit un profund entramat teòric al voltant de la noció de compatibilitat i les que en resulten. La conseqüència equacional, associada de manera intrínseca, purament algebraica, a la classe d'àlgebres, resulta equivalent en un sentit molt fort a la conseqüència d'una lògica sentencial, i aquesta equivalència té lloc a través d'unes traduccions definides pels mateixos termes i per les mateixes equacions que defineixen les congruències en termes dels filtres i recíprocament.

Aquestes relacions tan estretes entre teories (o filtres) i congruències, a banda del seu paper en la teoria general, fan possible demostrar alguns dels *teoremes de pont* que he mencionat a la introducció. Com he dit, són teoremes que estableixen que, sota certes condicions, una lògica C gaudeix d'una propietat típicament lògica si i només si la classe $\mathbf{Alg}C$ gaudeix d'una determinada propietat típicament algebraica; després de tot el que hem vist, és natural que aquestes propietats sovint tinguin a veure amb les congruències.

Vistes les traduccions, hi ha teoremes de pont gairebé immediats; per exemple, si C és algebritzable i \mathbf{K} és definible per equacions, aleshores C és finitament axiomatitzable si i només si \mathbf{K} té una presentació finita. Probablement, el teorema de pont més famós és el primer que van demostrar Blok i Pigozzi,³⁹ que estableix que si C és una lògica algebritzable, aleshores C compleix l'ano-

³⁷ Una teoria de la conseqüència $\models_{\mathbf{K}}$ és un conjunt d'equacions tancat sota la relació $\models_{\mathbf{K}}$, anàlogament a la definició 5.

³⁸ Evidentment, això és un cas particular del concepte general de residuació per a funcions entre conjunts ordenats, on la condició és la commutació amb supremes.

³⁹ El teorema es va provar a mitjan anys vuitanta, però l'article original de fet encara està per publicar [9], malgrat que ha circulat molt en diferents manuscrits i ja ha tingut una influència decisiva en l'evolució de la LAA. Segons explica Pigozzi a [51], va ser la necessitat de formular aquest teorema amb el grau de generalitat adequat el que va portar a la formalització de la noció d'algebritzabilitat i tot el que va venir al darrera. Vegeu també [17].

menat *teorema de la deducció*⁴⁰ si i només si la classe d'àlgebres $\mathbf{Alg}C$ té les *congruències relatives principals definibles equacionalment*, una propietat molt ben estudiada en el domini de l'àlgebra universal. Un altre grup d'exemples són els que relacionen certes formes de la propietat lògica anomenada *interpolació* amb certes formes de la propietat algebraica anomenada *amalgamació*; en les seves formes més generals, s'han establert per a lògiques equivalencials [20].

Cada classe de la jerarquia pot tenir els seus teoremes de pont, per això es diu que la jerarquia classifica les lògiques pel seu captament algebraic i lògic, i per això és important de classificar les lògiques concretes dins d'aquesta jerarquia. Sovint, les propietats algebraiques es coneixen molt bé, i hi ha eines molt potents a disposició per a esbrinar si una classe d'àlgebres concreta les satisfà o no. Una de les coses que s'han aconseguit són resultats de caràcter negatiu, és a dir, la demostració que determinada lògica no té una determinada propietat, resultats que fa vint-i-cinc anys Porte [52] assenyalava com una de les llacunes més notables que en aquell moment s'observaven en l'estudi general del teorema de la deducció.

He deixat pendent a la pàgina 97 el tema de com obtenir *la lògica dels anells*, una lògica algebritzable que aparentment, a partir de l'existència dels isomorfismes definibles entre ideals i congruències, sembla que ha d'existir i ser equivalent a la conseqüència equacional intrínseca de la classe dels anells. En vista de la definició 13 la solució és molt clara: tenim les traduccions $\rho(x \approx y) := \{x - y\}$ i $\tau(x) := \{x \approx 0\}$; si \mathbf{K} denota ara la classe dels anells, la conseqüència $\models_{\mathbf{K}}$ queda determinada algebraicament, i un cop conegudes τ i $\models_{\mathbf{K}}$ podem prendre la condició (A1) com a *definició* d'una lògica sentencial C . Tenint en compte l'observació de la nota 33, només cal comprovar la condició (A4). I observeu que aquesta condició concerneix únicament $\models_{\mathbf{K}}$, és a dir, és una propietat intrínseca, purament algebraica, de la classe dels anells; en el nostre cas, com que $\tau(\rho(x \approx y)) = \{x - y \approx 0\}$, es tracta de comprovar que sobre els anells les equacions $x \approx y$ i $x - y \approx 0$ són equivalents: una trivialitat! Per tant, sí, efectivament, la lògica sentencial C buscada existeix, es pot definir a partir de \mathbf{K} i τ , és algebritzable⁴¹ a través de les traduccions τ i ρ , $\mathbf{Alg}C = \mathbf{K}$, i el conegut teorema algebraic d'isomorfisme entre ideals i congruències és un cas particular de l'isomorfisme del teorema 10. A més, hi ha resultats generals que ens diuen com, a partir de les d'equacions que defineixen la classe dels anells, es pot obtenir una axiomatització de C . Que jo sàpiga, ningú no ha investigat a fons les seves propietats purament lògiques, o sigui que no sabem si com a lògica té un interès especial, però qui sap...?

⁴⁰ És una de les propietats més bàsiques i potents que pot tenir una lògica, generalitzant la que té la lògica clàssica en la forma: $\beta \in C(I, \alpha) \Leftrightarrow \alpha - \beta \in C(I)$.

⁴¹ De fet, la classificació es pot afinar més: a partir de la forma de τ i de ρ es pot veure que C és regularment finitament algebritzable.

11 I més enllà...

Actualment, es pot dir que la jerarquia de Leibniz és raonablement ben entesa, malgrat que hi ha encara problemes oberts en el seu estudi. La LAA s'expandeix alhora en altres direccions. Per acabar l'article, n'esmentaré algunes on els lògics catalans hem fet alguna contribució, o esperem fer-ne en un futur proper.

11.1 Altres teoremes de l'isomorfisme

El teorema 10 valia per a lògiques algebritzables, i al final de la secció 9 n'he esmentat versions modificades per a d'altres classes de la jerarquia. Seria natural de preguntar-se, més en general:

Hi ha un teorema de l'isomorfisme que valgui per a totes les lògiques?

La resposta és *sí*, hi ha un teorema absolutament general, obtingut per Font i Jansana a [28] usant tècniques que van més enllà del tipus de models algebraics considerats en aquest article, concretament els anomenats *models generalitzats plens*, i l'operador de Tarski, que és una generalització de l'operador de Leibniz. Deixant de banda els detalls, el fet és que per a cada lògica C i cada àlgebra A s'obté una representació amb significat lògic (en referència a C) de les congruències de A relatives a la classe $\mathbf{Alg}C$ (i notem que si $\mathbf{Alg}C$ és definible per equacions i $A \in \mathbf{Alg}C$, això vol dir totes les congruències de A). D'aquesta manera es cobreixen, per exemple, algunes classes d'àlgebres ja esmentades que són de la forma $\mathbf{Alg}C$, però on C segur que no és algebritzable:⁴² també en aquests casos les congruències tenen un significat lògic!

11.2 Què passa fora de la jerarquia de Leibniz?

Una altra tafaneria molt natural. Malgrat que la vella teoria de les matrius lògiques [63, 64] és totalment general, proposa una definició de contrapartida algebraica, \mathbf{Alg}^*C , que podem assegurar que és la correcta únicament en el cas protoalgebraic (vegeu la definició 7, la discussió subsegüent i el teorema 9). I, com hem dit, d'alguna manera es considera que les lògiques protoalgebraiques formen la classe més gran de lògiques on l'operador de Leibniz sembla que és una eina eficaç. Només els darrers deu o quinze anys s'han desenvolupat línies d'atac comparables a l'estudi d'aquest operador, aplicables a lògiques no protoalgebraiques⁴³ (no vull dir específiques per a aquestes, sinó per a lògiques arbitràries, i per tant en particular aplicables a les no protoalgebraiques). Unes línies es basen en l'ús de *famílies de filtres* en comptes de filtres individuals, i en l'estudi dels operadors de Tarski i de Suszko; unes altres centren la seva atenció en la relació d'ordre que hi hagi en les àlgebres, més que en les equacions. Vegeu [18, 26, 27, 29, 30, 31, 41, 42, 43, 55].

⁴² De fet, ni protoalgebraica; vegeu les notes 25 i 28.

⁴³ Les lògiques mencionades a la nota 23 són no protoalgebraiques.

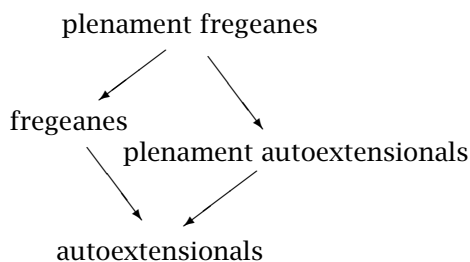


FIGURA 2: La jerarquia de Frege.

11.3 La jerarquia de Frege

L'estudi d'aquesta nova jerarquia és una de les línies de recerca recents en LAA que no depèn de la jerarquia de Leibniz. La jerarquia anomenada *de Frege* sorgeix [28] d'una classificació de lògiques basada també en la idea de congruència. De moment hi ha quatre classes identificades (vegeu la figura 2), que es defineixen segons si la relació d'interderivabilitat d'una lògica, o d'altres relacions associades, són o no una congruència de l'àlgebra de termes, o de les àlgebres dels models.⁴⁴ Aquesta jerarquia és molt ortogonal a la de Leibniz, en el sentit que no hi ha inclusions entre classes de l'una i de l'altra, i hi ha moltes interseccions no buides. La recerca en aquesta línia és molt recent i, probablement, hi ha més problemes oberts que resultats, especialment sobre les relacions que hi pugui haver entre ambdues jerarquies; per exemple, les lògiques que són alhora protoalgebraiques i fregeanes han estat completament caracteritzades a través de les àlgebres associades a [21, 22]. Especialment interessants són les lògiques *plenament autoextensionals*, que mostren un capteniment molt bo en més d'un sentit, i en particular pel que fa a les semàntiques referencials o relacionals, que no són purament algebraiques, cosa que obre camps d'expansió insospitats per a la LAA. Vegeu, per exemple, [3, 26, 43].

11.4 Lògiques en sentit més ampli

Em refereixo a nocions de conseqüència motivades per l'estudi de formes del raonament de caràcter no deductiu, que donen lloc a operadors $C : \mathcal{P}(Te) \rightarrow \mathcal{P}(Te)$ que compleixen algunes, però no totes les condicions de la definició 4. No són, per tant, «lògiques» en sentit estricte, però s'hi acosten, són objectes matemàtics amb un contingut lògic clar, i que retenen prou lligams amb la noció matemàtica, o deductiva, per a permetre el seu estudi amb tècniques de la LAA, convenientment esteses.

⁴⁴ Dos termes α i β són *interderivables* mòdul una lògica C quan $C(\alpha) = C(\beta)$ o, equivalentment, quan α i β tenen les mateixes C -conseqüències. En la lògica clàssica, aquesta relació es compleix si i només si el terme $\alpha \leftrightarrow \beta$ és un teorema. La relació d'interderivabilitat, en general és una relació d'equivalència; les *lògiques autoextensionals*, que formen la classe més gran de la jerarquia de Frege, es defineixen com aquelles on aquesta relació és una congruència de l'àlgebra Te ; exemples típics en són la lògica clàssica i la intuicionista, i en canvi les lògiques modals i la lògica multivalorada de Łukasiewicz no ho són.

Un exemple en són les *lògiques subestructurals* [23], que han (re)sorgit⁴⁵ amb molta força des de l'inici dels noranta per motivacions relacionades amb la computació o la lingüística. El seu estudi es feia principalment tractant els sistemes de Gentzen amb les tècniques habituals de la teoria de la demostració, però recentment s'han aplicat tècniques de la LAA, que han permès aclarir la relació entre aquest grup de «lògiques» i algunes classes de *reticles residuats*, com en [24].

11.5 Lògiques sobre llenguatges més complicats

És a dir, operadors de clausura $C : \mathcal{P}(L) \rightarrow \mathcal{P}(L)$ que compleixen totes les condicions de la definició 4 excepte que no estan definits sobre el conjunt dels termes Te sinó sobre un altre conjunt L d'expressions lingüístiques, construït normalment a partir dels termes, però més complicat.⁴⁶ El cas més simple és el de les conseqüències de la forma \models_{κ} , on $L = Te \times Te$; aquest cas està incorporat en la teoria de l'algebrització de Blok i Pigozzi. D'altres exemples estudiats més recentment inclouen parells de successions finites de termes (*seqüents*), m -ples de successions finites de termes (*seqüents m -dimensionals*), successions finites de seqüents (*hiperseqüents*), arbres, etc. Hom pot estendre moltes de les definicions i construccions exposades en aquest article a aquests objectes, sempre posant-los en relació amb models algebraics i les seves congruències, i hom obté les nocions corresponents d'algebritzabilitat, etc. Aquesta línia de treball, de fet, es va iniciar a casa nostra [61], i hi han intervingut tant lògics catalans [1, 35, 36, 57] com de fora [4, 54].

11.6 Versions més abstractes de la noció d'equivalència deductiva

Aquí es tracta de moure's en la direcció oposada a l'anterior: en comptes de complicar el llenguatge i els objectes derivats del llenguatge sobre els quals es generalitza la noció d'equivalència deductiva associada a la d'algebritzabilitat (definició 13), tot plegat se simplifica i es fa més abstracte. Això ho van iniciar Blok i Jónsson en un curs que van donar l'hivern del 1999; els aspectes més innovadors s'han publicat recentment [6], i consisteixen a aïllar les components essencials que permeten que les connexions entre les dues relacions de conseqüència definides mitjançant traduccions estableixin lligams tan forts com els teoremes d'isomorfisme. Bàsicament, es tracta d'estudiar les similituds (isomorfismes entre els reticles de tancats) entre operadors de clausura sobre dos conjunts arbitraris, sense altra estructura que l'acció sobre aquests d'un monoide abstracte, que correspon a la idea de substitució.⁴⁷ Els aspectes reti-

⁴⁵ Algunes lògiques que ara classifiquem com a subestructurals ja havien estat estudiades fa temps, per exemple les lògiques de la rellevància o algunes de les lògiques multivalorades. El punt de vista subestructural ha permès reconèixer els trets comuns a moltes d'elles, i s'ha pogut atacar el seu estudi d'una forma més sistemàtica.

⁴⁶ Per a la condició 4, la noció de substitució es defineix de manera *ad hoc* en cada cas, a partir dels endomorfismes de Te .

⁴⁷ És sabut que les substitucions, com a endomorfismes que són, formen un monoide amb la composició.

culars i de residuació, en la línia del teorema 14, prenen ara més protagonisme. Hom ha construït una teoria més abstracta (per tant, més simple) que unifica el tractament de molts casos similars que s'havien estudiat un per un. Això ha permès aplicar la idea d'equivalència deductiva no solament entre una lògica i una conseqüència equacional, sinó també entre dues conseqüències qualssevol. En particular, l'equivalència entre una lògica en el nostre sentit i un sistema de Gentzen, que ja s'havia estudiat a [1, 57] per a alguns casos particulars i que no quedava inclosa en la presentació de [6], ha estat estudiada a fons, en aquest nou context, a [54].

11.7 Tractament categorial

Això d'alguna manera significa una conjunció de les dues darreres línies de treball. D'una banda, l'ampliació del concepte de lògica per a acomodar les necessitats de la Informàtica Teòrica ja fa temps que havia produït les *institucions* [38], objectes basats en una noció categorial de llenguatge, de màxima generalitat i complicació, i que incorporen també les components sintàctiques d'una lògica així com les semàntiques. Les idees inicials de l'algebrització per mitjà de traduccions de seguida es van aplicar a les π -institucions [62], una versió més abstracta de les institucions. D'altra banda, els lectors mínimament familiaritzats amb les categories ja hauran advertit un perfum clarament categorial a la definició 13 o al teorema 14; la paraula *adjunció* els haurà vingut al cap de seguida. Els plantejaments més abstractes de [6] s'han començat a reformular, estendre o generalitzar en termes categorials, de maneres diferents (i en particular a π -institucions), a [34] i a [37].

12 Conclusió

Hem vist com la idea de *compatibilitat* ens ha dut a l'*operador de Leibniz*, un objecte purament algebraic que ha originat una nova visió de les relacions entre la Lògica i l'Àlgebra. La nova teoria ha establert dues *jerarquies* de lògiques, batejades amb els noms de dos grans lògics, matemàtics i filòsofs, Leibniz i Frege. Tenim així dos criteris per a *classificar* lògiques. Trobar la ubicació d'una lògica en aquestes jerarquies ens permet saber algunes característiques del seu capteniment algebraic, i també lògic, gràcies als *teoremes de pont*. D'altra banda, alguns dels problemes més interessants de la teoria general fan referència a aquestes jerarquies i a les relacions entre si.

Si mirem enrere, en la història de les matemàtiques, veurem que, en diferents àrees de la nostra ciència, i en èpoques molt diverses, els problemes de *classificació* han estat forces motrius molt importants que han condicionat decisivament llur evolució. Cadascú pot pensar en el seu exemple favorit.

Podríem concloure, doncs, que la Lògica Algebraica Abstracta ens dona una nova manera d'encaixar la Lògica dintre de les Matemàtiques, no només tècnicament, sinó també pel seu esperit.

Però això ja és tota una altra història.

Agraïments

Vull agrair als companys Félix Bou, José Gil-Férez, Ramon Jansana, Carles No-guera, Antoni Torrens i Ventura Verdú que s'hagin llegit una versió preliminar d'aquest article, m'hagin assenyalat alguns errors i m'hagin suggerit força millo-res. L'elaboració d'aquest article forma part de l'activitat de recerca finançada pel projecte MTM2004-03101 del Ministeri d'Educació i Ciència espanyol, que inclou fons FEDER de la Unió Europea, i l'ajut 2005SGR-00083 de la Generalitat de Catalunya.

Referències

- [1] ADILLON, R.; VERDÚ, V. «On a contraction-less intuitionistic propositional logic with conjunction and fusion». *Studia Logica (Special issue on Abstract Algebraic Logic, Part I)*, 65 (2000), 11-30.
- [2] AGLIANO, P.; URSINI, A. «On subtractive varieties III: from ideals to congruences». *Algebra Universalis*, 37 (1997), 296-333.
- [3] BABYONYSHEV, S. «Fully Fregean logics». *Reports on Mathematical Logic*, 37 (2003), 59-78.
- [4] BELARDINELLI, F.; JIPSEN, P.; ONO, H. «Algebraic aspects of cut elimination». *Studia Logica*, 77 (2004), 209-240.
- [5] BELNAP, N. D. «How a computer should think». A: RYLE, G. [ed.]. *Contemporary Aspects of Philosophy*. Boston: Oriol Press, 1976, 30-56.
- [6] BLOK, W.; JÓNSSON, B. «Equivalence of consequence operations». *Studia Logica (Special issue in memory of Willem Blok)*, 83 (2006), 91-110.
- [7] BLOK, W.; PIGOZZI, D. «Protoalgebraic logics». *Studia Logica*, 45 (1986), 337-369.
- [8] BLOK, W.; PIGOZZI, D. *Algebraizable logics*. Providence: Amer. Mathematical Society, 1989. Mem. Amer. Math. Soc.; 396.
- [9] BLOK, W.; PIGOZZI, D. «Abstract algebraic logic and the deduction theorem». *Bulletin of Symbolic Logic*. [Acceptat, en premsa].
- [10] BLOK, W.; RAFTERY, J. G. «Ideals in quasivarieties of algebras». A: CAICEDO, X.; MONTENEGRO, C. H. [ed.]. *Models, algebras and proofs*. Nova York; Basel: Marcel Dekker, 1999, 167-186. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Series; 203.
- [11] BLOK, W.; REBAGLIATO, J. «Algebraic semantics for deductive systems». *Studia Logica (Special issue on Abstract Algebraic Logic, Part II)*, 74 (2003), 153-180.
- [12] BOOLE, G. *The mathematical analysis of logic. Being an essay towards a calculus of deductive reasoning*. Cambridge: Macmillan, 1847.
- [13] BOOLE, G. *El análisis matemático de la lógica*. Madrid: Ediciones Cátedra, 1979. Cuadernos Teorema. Trad. d'E. Requena, introducció de J. Sanmartín.

- [14] BURRIS, S.; SANKAPPANAVAR, H. P. *A course in universal algebra*. Nova York: Springer-Verlag, 1981. [Exhaurit. La «millenium edition» es pot obtenir lliurement de <http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/>]
- [15] CZELAKOWSKI, J. «Reduced products of logical matrices». *Studia Logica*, 39 (1980), 19-43.
- [16] CZELAKOWSKI, J. «Equivalential logics, I, II». *Studia Logica*, 40 (1981), 227-236 i 355-372.
- [17] CZELAKOWSKI, J. *Protoalgebraic logics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. Trends in Logic - Studia Logica Library; 10.
- [18] CZELAKOWSKI, J. «The Suszko operator. Part I». *Studia Logica (Special issue on Abstract Algebraic Logic, Part II)*, 74 (2003), 181-231.
- [19] CZELAKOWSKI, J.; JANSANA, R. «Weakly algebraizable logics». *The Journal of Symbolic Logic*, 65 (2000), 641-668.
- [20] CZELAKOWSKI, J.; PIGOZZI, D. «Amalgamation and interpolation in abstract algebraic logic». A: CAICEDO, X.; MONTENEGRO, C. H. [ed.]. *Models, algebras and proofs*. Nova York and Basel: Marcel Dekker, 1998, 187-265. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Series; 203.
- [21] CZELAKOWSKI, J.; PIGOZZI, D. «Fregean logics». *Annals of Pure and Applied Logic*, 127 (2004), 17-76.
- [22] CZELAKOWSKI, J.; PIGOZZI, D. «Fregean logics with the multiterm deduction theorem and their algebraization». *Studia Logica*, 78 (2004), 171-212.
- [23] DOŠEN, K.; SCHROEDER-HEISTER, P. [ed.]. *Substructural Logics*. Oxford University Press, 1993. Studies in Logic and Computation; 2.
- [24] ESTEVA, F.; FONT, J. M.; GIL, A.; GODO, L.; TORRENS, A.; VERDÚ, V. «Logics preserving degrees of truth from residuated lattices. Part I». (2007). Manuscrit.
- [25] FONT, J. M. «Belnap's four-valued logic and De Morgan lattices». *Logic Journal of the IGPL*, 5 (1997), 413-440.
- [26] FONT, J. M. «Generalized matrices in abstract algebraic logic». Dordrecht: Kluwer, 2003, 57-86. A: HENDRIKS, V. F.; MALINOWSKI, J. [ed.]. *Trends in Logic. 50 years of Studia Logica*. Trends in Logic - Studia Logica Library; 21.
- [27] FONT, J. M. «Beyond Rasiowa's algebraic approach to non-classical logics». *Studia Logica*, 82 (2006), 172-209.
- [28] FONT, J. M.; JANSANA, R. *A general algebraic semantics for sentential logics*. Springer-Verlag, 1996. Lecture Notes in Logic; 7. Actualment distribuït per l'Association for Symbolic Logic.
- [29] FONT, J. M.; JANSANA, R.; PIGOZZI, D. «Fully adequate Gentzen systems and the deduction theorem». *Reports on Mathematical Logic*, 35 (2001), 115-165.

- [30] FONT, J. M.; JANSANA, R.; PIGOZZI, D. «A survey of abstract algebraic logic». *Studia Logica (Special issue on Abstract Algebraic Logic, Part II)*, 74 (2003), 13–97.
- [31] FONT, J. M.; JANSANA, R.; PIGOZZI, D. «On the closure properties of the class of full g-models of a deductive system». *Studia Logica (Special issue in memory of Willem Blok)*, 83 (2006), 215–279.
- [32] FONT, J. M.; VERDÚ, V. «Algebraic logic for classical conjunction and disjunction». *Studia Logica (Special issue on Algebraic Logic)*, 50 (1991), 391–419.
- [33] GALATOS, N.; JIPSEN, P.; KOWALSKI, T.; ONO, H. *Residuated lattices: an algebraic glimpse at substructural logics*. Amsterdam: Elsevier, 2007. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics; 151.
- [34] GALATOS, N.; TSINAKIS, C. «Equivalence of consequence relations: an order-theoretic and categorial perspective». (2006). Manuscrit.
- [35] GIL, A. J.; REBAGLIATO, J. «Protoalgebraic Gentzen systems and the cut rule». *Studia Logica (Special issue on Abstract Algebraic Logic, Part I)*, 65 (2000), 53–89.
- [36] GIL, A. J.; TORRENS, A.; VERDÚ, V. «On Gentzen systems associated with the finite linear MV-algebras». *Journal of Logic and Computation*, 7 (1997), 473–500.
- [37] GIL-FÉREZ, J. «Multi-term π -institutions and their equivalence». *Mathematical Logic Quarterly*, 52 (2006), 505–526.
- [38] GOGUEN, J.; BURSTALL, R. «Introducing institutions». A: CLARKE, E.; KOZEN, D. [ed.]. *Proceedings of the Logic Programming Workshop*. Nova York: Springer-Verlag, 1984, 221–256. Lecture Notes in Computer Science; 164.
- [39] GOGUEN, J.; MALCOLM, G. «A hidden agenda». *Theoretical Computer Science*, 245 (2000), 55–101. Per a més informació sobre aquest tema, visiteu el portal <http://www-cse.ucsd.edu/users/goguen/projs/halg.html>.
- [40] GUMM, H. P.; URSINI, A. «Ideals in universal algebras». *Algebra Universalis*, 19 (1984), 45–54.
- [41] JANSANA, R. «Selfextensional logics with implication». A: BÉZIAU, J.-Y. [ed.]. *Logica Universalis*. Basel: Birkhäuser Verlag, 2005, 65–88.
- [42] JANSANA, R. «Selfextensional logics with a conjunction». *Studia Logica*, 84 (2006), 63–104.
- [43] JANSANA, R.; PALMIGIANO, A. «Referential semantics: duality and applications». *Reports on Mathematical Logic (Special issue in memory of Willem Blok)*, 41 (2006), 63–93.
- [44] ŁOŚ, J. *O matrycach logicznych*. University of Wrocław, 1949. Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowe, Ser. B; 19.
- [45] ŁOŚ, J.; SUSZKO, R. «Remarks on sentential logics». *Indag. Math.*, 20 (1958), 177–183.

- [46] MARTINS, M. A. «Behavioral institutions and refinements in generalized hidden logics». *Journal of Universal Computer Science*, 12, (2006), 1020-1049.
- [47] MARTINS, M. A.; PIGOZZI, D. «Behavioural reasoning for conditional equations». *Cadernos de Matemática*, Universidade de Aveiro, CM03/I-19, (2003).
- [48] MCKINSEY, J. C. C.; TARSKI, A. «The algebra of topology». *Annals of Mathematics*, 45 (1944), 141-191.
- [49] ONO, H. «Substructural logics and residuated lattices - an introduction». A: HENDRIKS, V. F.; MALINOWSKI, J. [ed.]. *Trends in Logic. 50 years of Studia Logica*. Dordrecht: Kluwer, 2003, 193-228. Trends in Logic - Studia Logica Library; 21.
- [50] PAWLAK, Z. *Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning About Data*. Dordrecht: Kluwer, 1991.
- [51] PIGOZZI, D. «Abstract algebraic logic: past, present and future. A personal view». A: FONT, J. M.; JANSANA, R.; PIGOZZI, D. [ed.]. *Workshop on Abstract Algebraic Logic*. Bellaterra: Centre de Recerca Matemàtica, 1998, 122-138. Quaderns; 10,
- [52] PORTE, J. «Fifty years of deduction theorems». A: STERN, J. [ed.]. *Proceedings of the Herbrand Symposium*. Amsterdam: North-Holland, 1982, 243-250.
- [53] PRUCNAL, T.; WRÓŃSKI, A. «An algebraic characterization of the notion of structural completeness». *Bulletin of the Section of Logic*, 3 (1974), 30-33.
- [54] RAFTERY, J. «Correspondences between Gentzen and Hilbert systems». *The Journal of Symbolic Logic*, 71 (2006), 903-957.
- [55] RAFTERY, J. «The equational definability of truth predicates». *Reports on Mathematical Logic (Special issue in memory of Willem Blok)*, 41 (2006), 95-149.
- [56] RASIOWA, H. *An algebraic approach to non-classical logics*. Amsterdam: North-Holland, 1974. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics; 78.
- [57] REBAGLIATO, J.; VERDÚ, V. «On the algebraization of some Gentzen systems». *Fundamenta Informaticae (Special issue on Algebraic Logic and its Applications)*, 18 (1993), 319-338.
- [58] REBAGLIATO, J.; VERDÚ, V. «A finite Hilbert-style axiomatization of the implication-less fragment of the intuitionistic propositional calculus». *Mathematical Logic Quarterly*, 40 (1994), 61-68.
- [59] TARSKI, A. «Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik». *C. R. Soc. Sci. Lettr. Varsovie, Cl. III*, 23 (1930), 22-29.
- [60] TARSKI, A. «Grundzüge der Systemenkalküls. Erster Teil». *Fundamenta Mathematicae*, 25 (1935), 503-526.

- [61] TORRENS, A. «Model theory for sequential deductive systems». (1991). Manuscrit.
- [62] VOUTSADAKIS, G. «Categorical abstract algebraic logic: algebraizable institutions». *Applied Categorical Structures*, 10 (2002), 531–568.
- [63] WÓJCICKI, R. «Matrix approach in the methodology of sentential calculi». *Studia Logica*, 32 (1973), 7–37.
- [64] WÓJCICKI, R. *Theory of logical calculi. Basic theory of consequence operations*. Dordrecht: Reidel, 1988. Synthese Library; 199.

DEPARTAMENT DE PROBABILITAT, LÒGICA I ESTADÍSTICA
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT DE BARCELONA
GRAN VIA DE LES CORTS CATALANES, 585
08007 BARCELONA
jmfont@ub.edu